

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



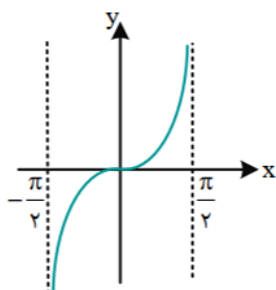
کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

گزینه ۱ صحیح است، زیرا اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق باشد، فقط یک مقدار به عنوان ماکزیمم مطلق و فقط یک مقدار به عنوان مینیمم مطلق تابع خواهد بود.

۲

گزینه ۲ نادرست است، زیرا اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، قطعاً در این بازه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد، اما اگر در بازه (a, b) پیوسته باشد، ممکن است در این بازه دارای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق نباشد. به عنوان نمونه، تابع $f(x) = \tan x$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پیوسته است، اما در این بازه ماکزیمم مطلق و همچنین مینیمم مطلق ندارد.



۳

گزینه ۳ صحیح است، زیرا در نقاط اکسترمم مطلق، مشتق یا برابر صفر است و یا موجود نیست.

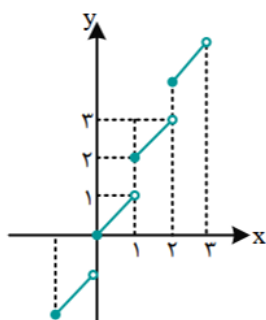
۴

گزینه ۴ صحیح است، زیرا در دو نقطه $x = a$ و $x = b$ مشتق تابع f موجود نیست.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

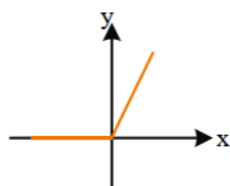
۲

۱ فاقد اکسترمم نسبی است، زیرا تابع در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.



۲

تمام نقاط $x \leq 0$ نقطه بحرانی تابع هستند و این نقاط همگی اکسترمم نسبی تابع نیز هستند.

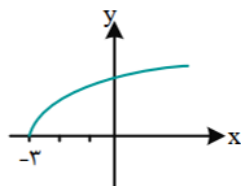


$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

زیرا نقاط $x < 0$ هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی محسوب می‌شوند و نقطه $x = 0$ نیز مینیمم نسبی است. پس تمام نقاط بحرانی، اکسترمم نسبی تابع هستند.

۳

فاقد اکسترمم نسبی است، زیرا تابع در نقطه $x = -3$ فاقد همسایگی است.



۴

دارای دو نقطه بحرانی است، ولی فقط یکی از آن‌ها اکسترمم نسبی است، زیرا:

$$f(x) = x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{3}{4}$$

نقطه $x = 0$ اکسترمم نسبی نیست، زیرا مشتق تابع در طرفین این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

x	$-\frac{3}{4}$	0	
y'	-	+	+
y	min نسبی		

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$$

$$\Rightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow 12x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -1$$

$$f(-2) = 48 + 32 - 48 + k = 32 + k$$

$$f(2) = 243 - 108 - 108 + k = 27 + k$$

$$f(2) = 48 - 32 - 48 + k = -32 + k$$

$$f(-1) = 3 + 4 - 12 + k = -5 + k$$

$$f(0) = k$$

$$\text{min مطلق} = -32 + k \quad \text{max مطلق} = 32 + k$$

$$\xrightarrow{\text{بنا بر فرض}} (32 + k) + (-32 + k) = 0 \Rightarrow 2k = 0 \Rightarrow k = 0$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

می‌دانیم برای تشخیص وضعیت یکنوایی تابع fog باید مشتق آن را تعیین علامت کنیم، برای این منظور داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x-1)f'(x^2-x)$$

$$= (2x-1)(2(x^2-x)^2 - 66(x^2-x) + 120) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2(x^2-x)^2 - 66(x^2-x) + 120=0 \Rightarrow (x^2-x)^2 - 22(x^2-x) + 40=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((x^2-x)-2)((x^2-x)-20)=0 \Rightarrow (x^2-x-2)(x^2-x-20)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2, x=-1 \\ x^2-x-20=0 \Rightarrow (x-5)(x+4)=0 \Rightarrow x=5, x=-4 \end{cases}$$

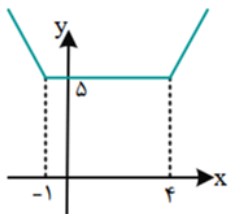
حال با توجه به ریشه‌های به دست آمده مشتق تابع fog را تعیین علامت می‌کنیم:

x	-4	-1	$\frac{1}{2}$	2	5	
(fog)'	-	+	-	+	-	+
fog	↘	↗	↘	↗	↘	↗

طبق جدول، وضعیت یکنوایی تابع fog در ۵ نقطه تغییر می‌کند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

با توجه به نمودار تابع f تمام گزاره‌ها صحیح هستند، زیرا تابع در بازه $[-1, 4]$ تابع ثابت است و مشتق تابع در تمام این نقاط برابر صفر است، پس دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.



از طرفی، چون حد تابع در $x \rightarrow \pm\infty$ برابر $+\infty$ است، پس تابع فاقد ماکزیمم مطلق است. همچنین در نقاطی با طول صحیح $x = -1, x = 2, x = 1, x = 0, x = -1$ صحیح است. کمترین مقدار تابع نیز برابر ۵ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f'(x) = \frac{x^2 + b - 2x(x+2)}{(x^2 + b)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 6x + b = 0$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $\rightarrow -b = -6 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 - 6x + 6}{(x^2 + 6)^2} = 0$

جدول تعیین علامت $\rightarrow \Delta = 60 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{-2} = -3 \pm \sqrt{15}$

x	$-3 - \sqrt{15}$	$-3 + \sqrt{15}$
f'	-	+
f	min	max

$\Rightarrow x_{\max} = -3 + \sqrt{15}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

در گزینه ۱ باید بازه بسته $[a, b]$ باشد تا عبارت صحیح باشد. نقاط اکسترمم نسبی، بحرانی‌اند، پس ممکن است در این نقاط مشتق موجود نباشد، مثل تابع $y = |x|$ در $x = 0$.
نقاط min و max مطلق، اگر ابتدا یا انتهای بازه باشند، اکسترمم نسبی نخواهند بود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$y' = 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ x_C = -1 \end{cases}$$

$$y(x_B) = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow x_A = -2$$

$$y_C = -1 + 2 + 2 = 4$$

$$S = \frac{4 \times 2}{2} = 6$$

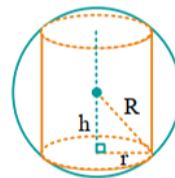
پس ارتفاع مثلث ۴ واحد و قاعده آن ۳ واحد است:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2$$

$$V = 2\pi r^2 h = 2\pi(R^2 - h^2)h = 2\pi(R^2 h - h^3) \Rightarrow V' = 2\pi(R^2 - 3h^2) = 0$$

$$\Rightarrow 3h^2 = R^2 \Rightarrow \frac{h^2}{R^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2h}{R} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$AC = \sqrt{16 + x^2}$$

$$BC = \sqrt{4 + (6-x)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 40}$$

$$\Rightarrow \ell = AC + BC = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{x^2 - 12x + 40}$$

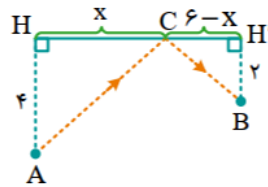
$$\Rightarrow \ell' = \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} + \frac{2x - 12}{2\sqrt{x^2 - 12x + 40}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} = \frac{6-x}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}} \Rightarrow \frac{x^2}{16 + x^2} = \frac{36 + x^2 - 12x}{x^2 - 12x + 40}$$

$$\Rightarrow x^4 - 12x^3 + 40x^2 = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 192x + 576$$

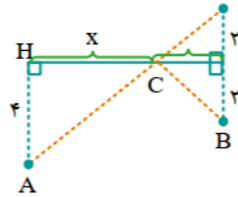
$$\Rightarrow 12x^2 - 192x + 576 = 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-12) = 0 \xrightarrow{0 < x < 6} x = 4 \Rightarrow \ell = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$



$$BC = B'C$$

$$AC + BC = AC + B'C$$



با مقارن کردن نقطه B نسبت به پاره خط HH' داریم:

پس باید طول $AC + B'C$ را حداقل کنیم که برای این کار، کافیست خطی مستقیم از A به B' بکشیم. در این صورت، با تشابه مثلثهای HAC و $H'B'C$ داریم:

$$\frac{x}{6-x} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}, BC = 2\sqrt{2} \Rightarrow \ell_{\min} = 6\sqrt{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}: \text{نقاط min و max نسبی}$$

$$f(1+\sqrt{5}) = \frac{(1+\sqrt{5})^2 + 3(1+\sqrt{5}) + 1}{1+\sqrt{5}-1} = \frac{10+5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 5+2\sqrt{5}$$

$$f(1-\sqrt{5}) = \frac{(1-\sqrt{5})^2 + 3(1-\sqrt{5}) + 1}{1-\sqrt{5}-1} = \frac{10-5\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 5-2\sqrt{5}$$

$$A(1+\sqrt{5}, 5+2\sqrt{5}) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2$$

$$B(1-\sqrt{5}, 5-2\sqrt{5})$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 - 2\sqrt{5} = 2(x - 1 - \sqrt{5}) \Rightarrow y - 5 - 2\sqrt{5} = 2x - 2 - 2\sqrt{5} \Rightarrow y = 2x + 3$$

روشی دوم:

$$y = \frac{2x+3}{1} = 2x+3$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲

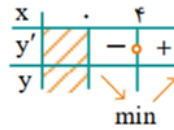
می‌دانیم $f'(4) = 0$ است.

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x} - \frac{ax+b}{2\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow f'(4) = \frac{2a - \frac{4a+b}{4}}{4} = 0 \Rightarrow 4a - b = 0 \Rightarrow b = 4a$$

$$f(4) = 4 \Rightarrow \frac{4a+b}{2} = 4 \Rightarrow 4a+b = 8 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4$$

از طرفی:

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$$



خواهیم داشت:

نقطه $(4, 4)$ مینیمم نسبی است و ab برابر ۴ می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳

فرض می‌کنیم نقطه $B(x, y)$ بر روی منحنی $y = \sqrt{3x-1}/5$ کمترین فاصله را تا نقطه $A(2, 0)$ دارد. خواهیم داشت:

$$h = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 3x-1/5} = \sqrt{x^2 - x + 2/5}$$

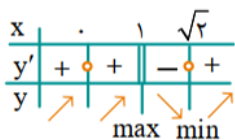
$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2/5} = \sqrt{2/25} = 1/5$$

کمترین مقدار سهمی زیر رادیکال، در رأس آن یعنی $x = \frac{1}{2}$ رخ می‌دهد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x & x \geq 1 \\ x^2 - 6 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 6 & x > 1 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{x>1} x = \sqrt{2} \\ 2x & x < 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

در $x=1$ تابع پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است. بنابراین $x=0$ و $x=1$ و $x=\sqrt{2}$ طول نقاط بحرانی می‌باشند.تابع دارای ۲ اکسترمم نسبی است. بنابراین: $(m, n) = (2, 2)$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

با توجه به اعداد فیثاغورسی Δx و $4x$ ارتفاع AH برابر $3x$ می‌باشد.

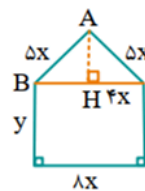
می‌دانیم:

$$\text{محیط} = 18x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - 9x$$

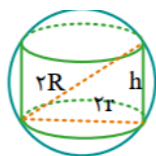
$$S = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}} = \frac{3x \times 4x}{2} + 18xy = 6x^2 + 18x(10 - 9x)$$

$$\Rightarrow S = -6x^2 + 180x \Rightarrow S' = -12x + 180 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



می‌خواهیم مساحت پنجره بیشترین مقدار باشد.



$$h^2 + r^2 = R^2$$

با توجه به شکل داریم:

۱۶

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{R^2 - h^2}{1} \right) h$$

$$V = \frac{\pi}{1} (R^2 h - h^3) \quad V'(h) = \frac{\pi}{1} (R^2 - 3h^2) = 0$$

$$h^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow (h = \sqrt{\frac{R^2}{3}}) = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 26 \times 3 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \\ r = 3\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$y' = 0 \Rightarrow 2ax = 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2a}{3} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{2a^2}{9} - \frac{2a^2}{27} = \frac{2a^2}{27} = 2 \Rightarrow a = 3$$

$$3x^2 - x^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{cases} N = (2, 0) \\ M = (-1, 2) \end{cases} \Rightarrow m = -1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2+2) - 2x(x+1)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

x	-3	1
y'	-	+

طبق جدول نقطه $A(-3, -\frac{1}{6})$ نقطه مینیمم نسبی و نقطه $B(1, \frac{1}{9})$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است. فاصله این دو نقطه برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (\frac{1}{9} + \frac{1}{6})^2} = \sqrt{16 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{148}{9}} = \frac{2\sqrt{37}}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = |x|(x^2 - 6) = \begin{cases} x^3 - 6x & x \geq 0 \\ -x^3 + 6x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & x > 0 \\ -3x^2 + 6 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

از طرفی، نقطه $x = 0$ نیز نقطه بحرانی تابع است، زیرا تابع f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0) = -6, \quad f'_-(0) = 6$$

پس نقاط $A(0, 0)$ و $B(1, -5)$ نقاط بحرانی تابع هستند و فاصله آنها برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{26}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

تابع $f(x) = x - [x]$ در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته و در نتیجه در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ مشتق ناپذیر است، یعنی تمام نقاط $x \in \mathbb{Z}$ نقطه بحرانی تابع f محسوب می‌شوند. پس تابع $f(x) = x - [x]$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

تابع $f(x) = x + |x|$ نیز دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است، زیرا در $x \leq 0$ ، ضابطه تابع به صورت $f(x) = 0$ خواهد بود که چون در $x \leq 0$ به تابع ثابت تبدیل می‌شود، پس تمام نقاط $x \leq 0$ در اعداد حقیقی نقطه بحرانی تابع محسوب می‌شوند، زیرا در نقاط $x < 0$ مشتق تابع برابر صفر است و در نقطه $x = 0$ تابع f مشتق ناپذیر است.

تابع گزینه ۳ دارای یک نقطه بحرانی است، زیرا:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 0 \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ غلط} \quad 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ غلط}$$

تابع فقط دارای نقطه بحرانی $x = 0$ است که در آن مشتق پذیر نیست، زیرا $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$ است.

تابع $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$ دارای دو نقطه بحرانی است، زیرا:

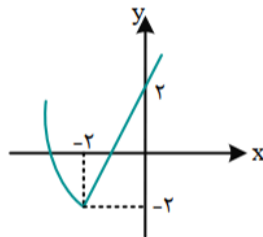
$$f'(x) = \frac{-(3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس تابع گزینه ۳، دارای کمترین تعداد نقطه بحرانی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر نمودار تابع f را رسم کنیم، از روی نمودار مشخص می‌شود که نقطه $(-2, -2)$ نقطه مینیمم مطلق تابع f است. چون این نقطه روی خط $3x + 2y - k = 0$ است، پس باید مختصات این نقطه در معادله خط صدق کند، یعنی داریم:

$$3(-2) + 2(-2) - k = 0 \Rightarrow k = -10$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^4(x+2)^4 \Rightarrow f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^4 + 4(x+2)^3(x-1)^4 \\ f'(x) &= 4(x-1)^3(x+2)^3(x+2+x-1) \Rightarrow f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^3(2x+1) = 0 \\ \Rightarrow x &= 1, x = -2, x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

چون ریشه‌های به دست آمده ریشه ساده و یا مکرر مرتبه فرد هستند، تابع f' قطعاً در طرفین این نقاط تغییر علامت می‌دهد و بنابراین هر سه نقطه، اکسترمم نسبی هستند، یعنی $m = 3$.

$$g(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \Rightarrow g'(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

چون ریشه‌های به دست آمده از معادله $g'(x) = 0$ ریشه‌های مضاعف هستند، پس قطعاً g' در طرفین آن‌ها تغییر علامت نمی‌دهد و بنابراین این ریشه‌ها، اکسترمم نسبی نیستند، یعنی: $n = 0$.

در نتیجه $m - n = 3 - 0 = 3$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

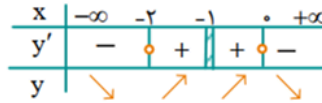
۲۱

۲۲

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - 1$$

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x+1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0, x = -2$$



همانطور که از روی جدول تغییرات تابع مشخص است، تابع f در بازه $(-\infty, -1)$ ابتدا وضعیت نزولی سپس وضعیت صعودی دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{36-x^2}$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad (1)$$

$$36-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6 \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow D_f = [2, 6]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}$$

با توجه به دامنه تابع، حاصل f' در بازه $(2, 6)$ همواره مثبت است، پس $f'(x)$ ریشه ندارد و در نتیجه فقط نقاط $x = 2$ و $x = 6$ نقاط بحرانی تابع هستند، در نتیجه داریم:

$$f(2) = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2} \Rightarrow \text{min مطلق} = -4\sqrt{2}$$

$$f(6) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \text{max مطلق} = 2$$

$$\frac{\text{max مطلق}}{\text{min مطلق}} = \frac{2}{-4\sqrt{2}} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

فرض می‌کنیم نقطه $M(\alpha, \alpha^2 + 2)$ روی منحنی تابع $y = x^2 + 2$ قرار دارد. می‌خواهیم فاصله این نقطه را از خطی به معادله $3y - 4x + 1 = 0$ به دست آوریم. با استفاده از فرمول فاصله بین نقطه و خط داریم:

$$d = \frac{|3\alpha^2 + 6 - 4\alpha + 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3\alpha^2 - 4\alpha + 7|}{5} = \frac{3\alpha^2 - 4\alpha + 7}{5}$$

$$d' = \frac{6\alpha - 4}{5} = 0 \Rightarrow 6\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\min d = \frac{3(\frac{4}{9}) - 4(\frac{2}{3}) + 7}{5} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 7}{5} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 7}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

$$D_f = [-\sqrt{\Delta}, \sqrt{\Delta}], \quad f'(x) = a - \frac{x}{\sqrt{\Delta - x^2}}$$

چون f در $x = 2$ مشتق دارد و $x = 2$ طول نقطه بحرانی f است، پس:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 2$$

اکنون برای محاسبه مقدار $\min$ مطلق، باید مقدار تابع را در نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه حساب کنیم:

$$f(\sqrt{\Delta}) = 2\sqrt{\Delta}$$

$$f(-\sqrt{\Delta}) = -2\sqrt{\Delta} \Rightarrow \text{Min مطلق}$$

$$f(2) = \Delta \Rightarrow \text{Max مطلق}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

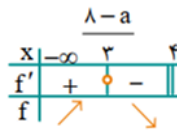
برای تشخیص یکنوایی، تابع f' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$D_f = (-\infty, 4]$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{x+a}{2\sqrt{4-x}} = \frac{\lambda - 3x - a}{2\sqrt{4-x}}$$

$$f' = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda - a}{3}$$

$$\frac{\lambda - a}{3} = -3a \Rightarrow a = -1$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸

از تابع مشتق گرفته و نقاطی که مشتق برابر صفر می‌شود را پیدا می‌کنیم. دقت شود که تابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیر است و نقطه بحرانی‌ای از نوع "مشتق ناپذیری" ندارد:

$$f'(x) = 2(x+\alpha)(x-\alpha) + (x+\alpha)^2$$

$$f'(x) = (x+\alpha)(2x-2\alpha+x+\alpha) = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \Rightarrow f(-\alpha) = 0 \\ x = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow f(\frac{\alpha}{3}) = -32 \end{cases}$$

$$(\frac{\alpha}{3})^2 (-\frac{2}{3}\alpha) = -32 \Rightarrow \frac{-32}{27} \alpha^3 = -32$$

$$\alpha^3 = 27 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \text{ طول اکسترمم} \end{cases}$$

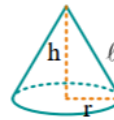
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹

$$\ell + h = 4 \Rightarrow \ell = 4 - h$$

$$h^2 + r^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = (4-h)^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = h^2 + 16 - 8h \Rightarrow r^2 = 16 - 8h$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} (16 - 8h) h$$



مقدار V هنگامی $\max$ است که $h = 1$ ، زیرا V سهمی با ریشه $h = 0$ و $h = 2$ است، پس به ازای $h = 1$ بیشترین است.

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3} \times 8 \times 1 = \frac{8\pi}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰

فرض کنید $A(a, f(a))$ و $B(a, g(a))$. در این صورت، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(a-a)^2 + (f(a)-g(a))^2} = |f(a)-g(a)| = \left| (a-2)^2 - \frac{2}{3}a\sqrt{a} + 3a \right|$$

$$d' = 2(a-2) - \sqrt{a} + 3, a > 0 \quad \text{بنابراین، اگر فرض کنیم } d = (a-2)^2 - \frac{2}{3}a\sqrt{a} + 3a \text{، آن گاه:}$$

$$d' = 0 \Rightarrow 2a - 1 = \sqrt{a} \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = a \Rightarrow 4a^2 - 5a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)(4a-1) = 0 \Rightarrow a=1, a=\frac{1}{4}$$

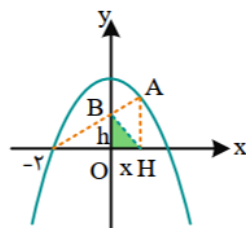
غقی $\frac{1}{4}$

$$d(1) = (1-2)^2 - \frac{2}{3} \times 1 \times \sqrt{1} + 3 \times 1 = 1 - \frac{2}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

پس کمترین مقدار d به ازای $a=1$ به دست می‌آید که برابر است با:

پس کمترین طول AB هم برابر $\frac{10}{3}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



با توجه به شکل داریم:

۳۱

$$OB \parallel AH \Rightarrow \frac{2}{x+2} = \frac{h}{4-x^2} \Rightarrow h = 2(2-x)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BOH} = \frac{xh}{2} = x(2-x) = 2x - x^2$$

$$S' = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 2 - 1 = 1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

۳۲

باید نامعادله‌های $f' \geq 0$ و $f'' \geq 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = -4x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 4x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 3 & & +\infty \\ f' & & + & \circ & + & \circ & - & \end{array} \xrightarrow{f'(x) \geq 0} x \in (-\infty, 3] \quad (1)$$

$$f''(x) = -12x + 12 = 0 \Rightarrow 12x(-x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ f'' & & - & \circ & + & \circ & - & \end{array} \xrightarrow{f''(x) \geq 0} x \in [0, 2] \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x \in [0, 2] \Rightarrow \beta = 2, \alpha = 0 \Rightarrow \beta - \alpha = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

نکته (آزمون یکنوایی تابع):

- الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
 ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.
 پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.
 کافی است مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم، پس داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

با توجه به اینکه معادله $x^2 + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد، پس عبارت $(x^2 + 1)^2$ همواره مثبت است، پس کافی است صورت f' را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	•	$+\infty$
f'	-	○	+
f	↘		↗

اگر $x \in (-\infty, 0)$ ، تابع f اکیداً نزولی و اگر $x \in (0, +\infty)$ ، تابع f اکیداً صعودی است.
 بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

نکته: یافتن اکسترم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته $[a, b]$ به شرح زیر است:

- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم.
- مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
- در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است.
 می‌دانیم $x = -1$ و $x = 2$ ، نقاط ابتدا و انتهای بازه و در نتیجه نقاط بحرانی تابع f هستند. اکنون باید نقاط بحرانی دیگر تابع را در صورت وجود در بازه $[-1, 2]$ پیدا کنیم. بنابراین:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

اکنون عرض نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(-1) = -5 + k, & f(2) = 4 + k \\ f(0) = k, & f(1) = -1 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{مینیمم مطلق} = -5 + k, \\ \text{ماکزیمم مطلق} = 4 + k \end{matrix}$$

حالا داریم:

$$-5 + k = \frac{1}{2}(4 + k) \Rightarrow -5 + k = 2 + \frac{1}{2}k \Rightarrow k = 14$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵

نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد. اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد. اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

ابتدا نقاط اکسترمم نسبی تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = (x-2)^2(x+1) \Rightarrow f'(x) = 2(x-2)(x+1) + (1)(x-2)^2 \Rightarrow f'(x) = (x-2)(2x+2+x-2) = (x-2)(3x)$$

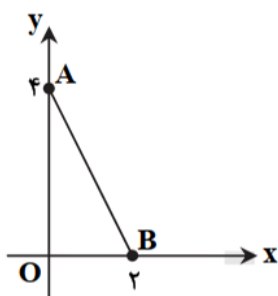
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار مشخص است که $x_A < x_B$ ، پس $x_A = 0$ و $x_B = 2$ است.
بنابراین:

$$f(0) = 4 \Rightarrow A(0, 4) \quad \text{max نسبی}$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow B(2, 0) \quad \text{min نسبی}$$

با رسم مثلث AOB ، مساحت آن را به دست می آوریم:



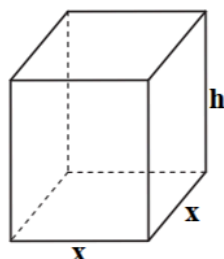
$$\Rightarrow S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

نکته (تعریف): با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می نامیم.

قاعده را یک مربع به ضلع x و ارتفاع را h در نظر می گیریم. حجم مکعب مستطیل ۱۶ است، پس:



$$x^2 h = 16 \Rightarrow h = \frac{16}{x^2}$$

مکعب مستطیل در باز، ۵ وجه دارد. مجموع مساحت این ۵ وجه برابر است با:

$$S = x^2 + 4xh$$

$$S = x^2 + 4x\left(\frac{16}{x^2}\right) \Rightarrow S = x^2 + \frac{64}{x}$$

با جای گذاری $h = \frac{16}{x^2}$ ، S را بر حسب x می نویسیم:

اکنون با محاسبه S' و حل معادله $S' = 0$ ، داریم:

$$S' = 0 \Rightarrow 2x - \frac{64}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{64}{x^2} \Rightarrow x^3 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$$

پس h برابر است با:

$$h = \frac{16}{x^2} = \frac{16}{4^2 \sqrt[3]{16}} = \frac{4}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد. نکته (آزمون یکنوایی تابع):

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

چون تابع چندجمله‌ای f فقط در بازه $[1, 3]$ اکیداً نزولی است، $x = 3$ و $x = 1$ ریشه‌های مشتق تابع f هستند. بنابراین:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ f'(3) = 0 \Rightarrow 27 - 6a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 24 - 4a = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9$$

اکنون طول نقطه بحرانی تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = 36x^4 + 18x \Rightarrow g'(x) = 144x^3 + 18$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 144x^3 + 18 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{18}{144} = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I \subseteq D_f$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{a}{6}x^3 - bx^2 + 2x - \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2}x^2 - 2bx + 2$$

تابع f چندجمله‌ای است، پس در تمام نقاط مشتق پذیر است. از طرفی نقطه $A(2, -2)$ اکسترمم نسبی تابع است، بنابراین $f(2) = -2$ و $f'(2) = 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} f(2) = -2 \Rightarrow \frac{4}{3}a - 4b + 4 - \frac{2}{3} = -2 \Rightarrow \frac{4}{3}a - 4b = -\frac{16}{3} \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 2a - 4b + 2 = 0 \Rightarrow 2a - 4b = -2 \end{cases} \xrightarrow{-} \frac{2}{3}a = \frac{10}{3} \Rightarrow a = 5, b = 3$$

در نتیجه $a + b = 8$ است.

اکنون با تعیین علامت مشتق تابع، نوع این اکسترمم را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)\left(\frac{5}{2}x-1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{5}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	2	$+\infty$
f'		+	-	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$A(2, -2)$ مینیمم نسبی تابع است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

نکته: نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.
 نکته: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x از D_f داشته باشیم:
 $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.
 ابتدا نقطه یا نقاط بحرانی تابع $c(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$c(t) = \frac{3t}{t^3 + 54} \Rightarrow c'(t) = \frac{3(t^3 + 54) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 54)^2} = \frac{162 - 9t^3}{(t^3 + 54)^2}, \quad c'(t) = 0 \Rightarrow 162 - 9t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = 27 \Rightarrow t = 3$$

پس $t = 3$ ، تنها نقطه بحرانی تابع است. با رسم جدول تغییرات داریم:

t	0	3	$+\infty$
$c'(t)$		+	-
$c(t)$		$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{1}{9}$	

پس نقطه $A(3, c(3))$ ، نقطه ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق برابر است با:

$$c(3) = \frac{3(3)}{3^3 + 54} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

دقت کنید:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3}{t^2} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰

نکته ۱: اگر $f'(c) = 0$ و علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

نکته ۲: اگر تابع f در $x = c$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه: $f'(c) = 0$.

تابع $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ در نقطه $x = -1$ مشتق پذیر بوده و در این نقطه اکسترمم نسبی دارد، پس $f'(-1)$ برابر صفر است و از طرفی نقطه اکسترمم نسبی در تابع صدق می‌کند. بنابراین:

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \Rightarrow -2a - \frac{b}{1} = 0 \Rightarrow b = -2a \\ f(-1) = -3 \Rightarrow a + \frac{b}{-1} = -3 \Rightarrow a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 2$$

بنابراین تابع به‌صورت $y = -x^2 + \frac{2}{x}$ است و داریم:

$$y' = -2x - \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 - 2}{x^2} = \frac{-2(x^3 + 1)}{x^2}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		+	-	-
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
		max نسبی		

بنابراین نقطه‌ای با طول $x = -1$ ، ماکزیمم نسبی این تابع است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱

نکته: فرض کنیم $x = c$ طول نقطه بحرانی تابع f باشد، همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد، اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.
برای محاسبه مشتق تابع f ابتدا آن را ساده تر می کنیم، سپس مشتق می گیریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

f' فقط به ازای $x = 0$ برابر با صفر است. پس تنها نقطه بحرانی تابع f ، نقطه $(0, 2)$ است.

مطابق جدول تغییرات روبه رو این نقطه ماکزیمم نسبی تابع است:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

Max
نسبی

$$(0, 2) \Rightarrow a = 0, \quad b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲

نکته: در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
مشتق تابع f برابر است با:

$$f'(x) = \frac{6}{3\sqrt[3]{(6x-6)^2}} - 2 = \frac{6 - 6\sqrt[3]{(6x-6)^2}}{3\sqrt[3]{(6x-6)^2}}$$

برای آنکه f اکیداً صعودی باشد، باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{6 - 6\sqrt[3]{(6x-6)^2}}{3\sqrt[3]{(6x-6)^2}} > 0$$

$$\Rightarrow 6 - 6\sqrt[3]{(6x-6)^2} > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(6x-6)^2} < 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان 3}} (6x-6)^2 < 1 \Rightarrow 36(x-1)^2 < 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{36} \Rightarrow -\frac{1}{6} < x-1 < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} < x < \frac{7}{6}$$

یعنی تابع f روی بازه $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$ اکیداً صعودی است و داریم:

$$\max(b-a) = \frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳

نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

ج) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

با توجه به نمودار f' ، مقدار مشتق در چهار نقطه با طول های a, b, c, d برابر صفر است

یا موجود نیست، پس این ۴ نقطه، نقاط بحرانی تابع f هستند.

مشتق تابع f قبل از a مثبت و بعد از a منفی است، پس تابع f در $x = a$ دارای ماکزیمم

نسبی است. مشتق تابع f قبل از b از منفی و بعد از b مثبت است، پس تابع f در $x = b$

دارای مینیمم نسبی است.

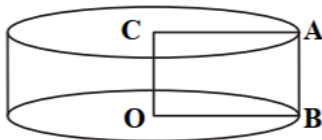
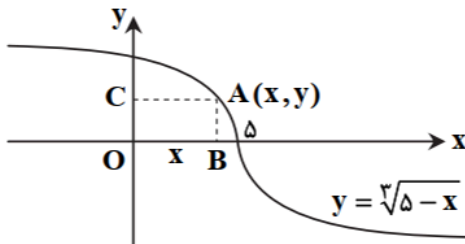
مشتق تابع f قبل از c مثبت و بعد از c منفی است، پس تابع f در $x = c$ دارای ماکزیمم

نسبی است.

مشتق تابع f قبل و بعد از d منفی است و علامت مشتق در این نقطه تغییر نمی کند، پس برای $x = d$ f اکسترمم نسبی نیست.

یعنی تابع f در دو نقطه به طول $x = a$ و $x = c$ ، ماکزیمم نسبی در یک نقطه به طول $x = b$ ، مینیمم نسبی دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



مطابق شکل روبه‌رو، مستطیل $ABOC$ با طول و عرض x و y است. از آنجا که رأس

A روی تابع $y = \sqrt[3]{5-x}$ قرار دارد، بین x و y رابطه $y = \sqrt[3]{5-x}$ برقرار است.

در اثر دوران این مستطیل حول محور عرض‌ها، استوانه‌ای با ارتفاع y و شعاع قاعده x به‌دست می‌آید. تابع حجم این استوانه به‌صورت زیر است:

$$V = \pi x^2 y \Rightarrow V = \pi x^2 \sqrt[3]{5-x} \Rightarrow V = \pi \sqrt[3]{5x^6 - x^7}$$

برای یافتن ماکزیمم تابع V ، نقاط بحرانی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$V' = 0 \Rightarrow \pi \frac{3 \cdot x^5 - 7x^6}{3\sqrt[3]{(5x^6 - x^7)^2}} = 0 \Rightarrow 3 \cdot x^5 - 7x^6 = 0 \Rightarrow x^5 (3 - 7x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{7} \end{cases}$$

واضح است که $x = 0$ طول نقطه ماکزیمم تابع V نیست و ماکزیمم تابع V در $x = \frac{3}{7}$ رخ می‌دهد. بنابراین قطر قاعده برابر با

$$\frac{6}{7} = \frac{3}{7} \times 2 \text{ است.}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

طبق شکل مقابل، با فرض $MN = x$ و $NP = y$ و با استفاده از تالس داریم:

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{4-y}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow 4-y = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 4 - \frac{1}{2}x$$

حال مساحت مستطیل را به صورت تابعی از x می نویسیم:

$$S = xy = x(4 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$$

$$S' = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 4 \\ \hline S' & + \quad 0 \quad - \\ \hline S & \nearrow \quad \searrow \end{array}$$

$$S_{\max} = -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 = -8 + 16 = 8$$

به ازای $x = 4$ مقدار S ماکزیمم است. بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶

نکته: مراحل یافتن اکسترم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته $[a, b]$ به صورت زیر است:(۱) مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می یابیم.

(۲) مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می کنیم.

(۳) در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است.تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ در بازه $[-1, 3]$ پیوسته است، پس داریم:

$$f'(x) = \frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{نقاط مشتق ناپذیر} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0, 2 \end{cases}$$

نقاط $x=0$ ، $x=1$ و $x=2$ ، نقاط بحرانی تابع هستند؛ حال داریم:

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1) = \sqrt[3]{1+2} = \sqrt[3]{3} \\ x=0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ x=1 \Rightarrow f(1) = \sqrt[3]{1-2} = -1 \\ x=2 \Rightarrow f(2) = 0 \\ x=3 \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{9-6} = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $y = -1$ و ماکزیمم مطلق تابع $y = \sqrt[3]{3}$ است و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt[3]{3} - 1 = \text{ماکزیمم مطلق تابع} + \text{مینیمم مطلق تابع}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷

نکته: در مسائل بهینه‌سازی برای یافتن ماکزیمم یا مینیمم یک عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را بر حسب یکی از متغیرهای مسئله به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از مشتق‌گیری اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم.

اضلاع قائمه مثلث قائم‌الزاویه را x و y در نظر می‌گیریم. اگر مثلث را حول ضلع به طول x دوران دهیم، مخروط قائمی به وجود می‌آید که شعاع قاعده آن برابر y و ارتفاع آن x خواهد بود، داریم:

$$x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y \quad (*) , \quad 0 < y < 2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi y^2 x = \frac{\pi}{3} y^2 (2 - y) = \frac{\pi}{3} (2y^2 - y^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (4y - 3y^2) = 0 \Rightarrow y(4 - 3y) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad y = \frac{4}{3}$$

مشتق V بر حسب y را محاسبه می‌کنیم:

با رسم جدول تغییرات تابع V داریم:

y	0	$\frac{4}{3}$	2
V'		+	-
V		$\nearrow$ max $\searrow$	

طبق جدول روبه‌رو به ازای $y = \frac{4}{3}$ ، مقدار V ماکزیمم است. پس:

$$y = \frac{4}{3} \xrightarrow{(*)} x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{2} = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸

نکته (تعریف): نقطه به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد. نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد، اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد، اگر f' در c تغییر علامت ندهد، به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

اکنون جدول تغییرات تابع f را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'		-	+	+
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		1	2	

بحرانی min نسبی

(0, 1) نقطه مینیمم نسبی و مطلق تابع f است.

پس تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد.

دقت کنید که $x = 1$ ریشه مضاعف معادله $f'(x) = 0$ است و علامت مشتق در اطراف آن تغییر نمی‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹

نکته: اگر نقطه $A(a, b)$ اکستریم نسبی تابع f بوده و $f'(a)$ موجود باشد، آنگاه: $f'(a) = 0$.

چون $A(-5, -10)$ اکستریم نسبی f است، پس:

$$f(-5) = -10 \Rightarrow \frac{25 - 5a + b}{-3} = -10 \Rightarrow 25 - 5a + b = 30 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x+2) - (x^2 + ax + b)}{(x+2)^2}$$

$$f'(-5) = 0 \Rightarrow \frac{(-10+a)(-3) - (25 - 5a + b)}{9} = 0 \xrightarrow{(1)} 30 - 3a - 30 = 0 \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{(1)} 25 + b = 30 \Rightarrow b = 5$$

بنابراین مقدار خواسته شده سؤال برابر است با:

$$b - a = 5 - 0 = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰

نکته: در مسائل بهینه‌سازی برای یافتن ماکزیمم یا مینیمم یک عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را برحسب یکی از متغیرهای مسئله به‌دست

می‌آوریم و سپس با استفاده از مشتق و...، اکستریم تابع را به‌دست می‌آوریم.

اضلاع مستطیل را x و y در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 \quad (1)$$

اگر مستطیل روبه‌رو را حول ضلع به طول y دوران دهیم، استوانه‌ای به وجود می‌آید که حجم آن به‌صورت زیر است:

$$V = \pi x^2 y \xrightarrow{(1)} V = \pi(9 - y^2)y \Rightarrow V = \pi(9y - y^3)$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 9 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3 \xrightarrow{y \geq 0} 0 \leq y \leq 3$$

حال مشتق V را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$V' = \pi(9 - 3y^2) = 0 \Rightarrow 9 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

y	۰	$\sqrt{3}$	۳
V'	+	۰	-
V		$\nearrow$ max نسبی $\searrow$	

طبق جدول فوق، به‌ازای $y = \sqrt{3}$ بیشترین حجم حاصل می‌شود، پس داریم:

$$x^2 = 9 - y^2 = 9 - 3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱

نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر است. اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

نکته: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

نکته: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

ابتدا نقاط بحرانی و سپس اکسترمم‌های تابع $f(x) = (32-x)\sqrt[3]{x}$ را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = -\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(32-x) = \frac{-3x+32-x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-4x+32}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow -4x+32=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow (8, 48) \text{ نقطه بحرانی}$$

$$3\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0) \text{ نقطه بحرانی}$$

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
y'		+	+	-
y		↗	↗	↘

۴۸

max نسبی

پس نقطه $A(8, 48)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین:

$$\alpha=8, \beta=48 \Rightarrow \beta-\alpha=40.$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲

نکته: نقطه به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ابتدا مشتق تابع f با دامنه $D_f = \mathbb{R}$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + ax + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x+a}{3\sqrt[3]{(2x^2+ax+5)^2}}$$

اگر $x=2$ طول نقطه بحرانی تابع f باشد، باید $x=2$ ریشه صورت باشد تا $f'(2)=0$ شود، یا باید $x=2$ ریشه مخرج باشد، تا $f'(2)$ نامتناهی شود. بنابراین:

$$4x+a=0 \xrightarrow{x=2} 8+a=0 \Rightarrow a=-8$$

$$2x^2+ax+5=0 \xrightarrow{x=2} 13+2a=0 \Rightarrow a=-\frac{13}{2}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a ، برابر $-\frac{29}{2} = -\frac{13}{2} - 8$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۳

نکته: برای حل مسائل بهینه‌سازی، ابتدا تابع موردنظر را تشکیل می‌دهیم و سپس اکسترم‌های مطلق آن را با توجه به شرایط مسئله به‌دست می‌آوریم.

فرض می‌کنیم نقطه $M(x, y)$ روی $y = 2x + 8$ و طول MA کمترین مقدار ممکن باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} M(x, y) \\ A(2, 0) \end{cases} \Rightarrow d = MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow d = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}$$

M روی سهمی است و $y = 2x + 8$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 2x + 8} \\ \Rightarrow d &= \sqrt{x^2 - 2x + 12} \quad (*) \end{aligned}$$

اکنون با محاسبه مشتق d ، داریم:

$$\begin{aligned} d' &= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+12}} \\ \xrightarrow{x^2-2x+12 > 0} 2x-2 &= 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

بنابراین کمترین فاصله نقطه A از سهمی برابر است با:

$$x = 1 \xrightarrow{(*)} d = \sqrt{1-2+12} = \sqrt{11}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴

نکته: در توابع مشتق‌پذیر، مقدار مشتق به‌ازای اکسترم نسبی برابر صفر است؛ یعنی اگر تابع f مشتق‌پذیر و $x = c$ طول اکسترم نسبی آن باشد، آنگاه:

$$f'(c) = 0$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ A(-1, 2) &\Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow 2a - b = 3 \end{aligned}$$

مختصات نقطه اکسترم نسبی در تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \Rightarrow -1 + a - b = 2 \Rightarrow a - b = 3 \Rightarrow -a + b = -3 \\ \begin{cases} 2a - b = 3 \\ -a + b = -3 \end{cases} &\Rightarrow a = 0, b = -3 \Rightarrow a + b = -3 \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

نکته: آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.ت) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 16) - 2x(x+3)}{(x^2 + 16)^2} = \frac{x^2 + 16 - 2x^2 - 6x}{(x^2 + 16)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 16}{(x^2 + 16)^2}$$

اگر f' در بازه‌ای مقداری منفی باشد، تابع f در آن بازه اکیداً نزولی است.جدول تغییرات تابع f' را رسم می‌کنیم:

$$-x^2 - 6x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases}$$

مخرج کسر f' در تعیین علامت بی‌تأثیر است، زیرا یک عبارت همواره مثبت است.

x	$-\infty$	-8	2	$+\infty$
f'		-	+	-
یکنوایی f		↘ نزولی اکید	↗ صعودی اکید	↘ نزولی اکید

تابع در بازه‌های $(-\infty, -8)$ و $(2, +\infty)$ نزولی اکید است که با توجه به صورت مسئله $k = -8$ حداکثر مقدار است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

نکته: قرینه نقطه (x, y) نسبت به مبدأ مختصات $(-x, -y)$ است.

نقطه $A(x, \frac{1}{2\sqrt{x}})$ روی تابع $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ قرار دارد. بنابراین مختصات نقطه $A'(-x, -\frac{1}{2\sqrt{x}})$ به صورت $A'(-x, -\frac{1}{2\sqrt{x}})$ است. تابع طول پاره‌خط AA' برابر است با:

$$d(x) = AA' = \sqrt{(x+x)^2 + (\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^2} = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}}$$

برای یافتن کمترین مقدار d ، نقاط بحرانی تابع $d(x)$ را پیدا می‌کنیم.

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}}} = 0 \Rightarrow 8x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار AA' برابر است با:

$$d(\frac{1}{2}) = \sqrt{4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را به صورت تابعی از x می نویسیم:

$$d = OA = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y=4-x^2} d = \sqrt{x^2 + (4-x^2)^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 + 16 - 8x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$$

$$d' = \frac{4x^3 - 14x}{2\sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 14x = 0$$

$$x(4x^2 - 14) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad 4x^2 - 14 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{14}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow$$

x	$-\frac{\sqrt{14}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{14}}{2}$
d'	-	+	-
d	↘	↗	↘

به ازای $x = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$ مقدار d کمترین است، پس داریم:

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{14}{4} + (4 - \frac{14}{4})^2} = \sqrt{\frac{14}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.
 نکته: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر است. اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.
 تابع f در تمام نقاط مشتق پذیر است و $x = 1$ طول نقطه بحرانی آن است، پس $f'(1) = 0$: بنابراین:

$$f(x) = 3x^5 - ax^3 + b \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 3ax^2$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 15 - 3a = 0 \Rightarrow a = 5$$

اکنون با تعیین علامت مشتق، طول نقطه ماکزیمم نسبی را مشخص می کنیم:

$$a = 5 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$f' = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	-	+	+
y	↗	↘	↘	↗	↗
		max نسبی		min نسبی	

پس $x = -1$ طول ماکزیمم نسبی است و داریم:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + b \xrightarrow{x=-1} f(-1) = 2 + b \Rightarrow A(-1, 2 + b) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

نقطه A روی خط $y = 3x - 7$ است؛ پس داریم:

$$2 + b = 3(-1) - 7 \Rightarrow b = -12$$

بنابراین $a - b = 5 + 12 = 17$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹

نکته: فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم. هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = \frac{2x+2}{3\sqrt{(x^2+2x-63)^2}}$$

ریشه‌های صورت و مخرج تابع y' ، نقاط بحرانی تابع هستند.

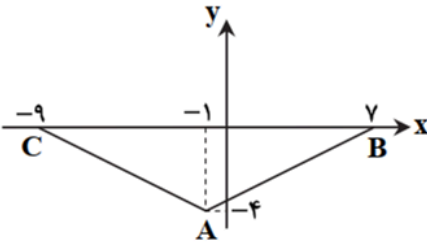
$$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x^2+2x-63=0 \Rightarrow (x+9)(x-7)=0 \Rightarrow x=7, x=-9$$

بنابراین نقاط $A(-1, -4)$ و $B(7, 0)$ و $C(-9, 0)$ ، نقاط بحرانی این تابع هستند.

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{4 \times (7+9)}{2} = 32$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

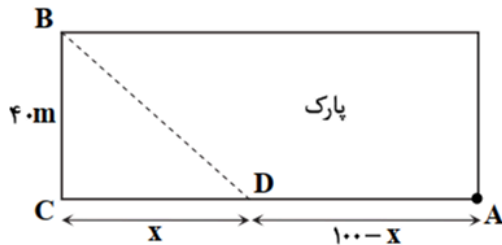
۶۰

نکته: اگر متحرکی با سرعت ثابت v متر بر ثانیه مسافت x متر را در t ثانیه طی کند، داریم:

$$x = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

نکته: در مسائل بهینه‌سازی برای یافتن ماکزیمم یا مینیمم یک عبارت ابتدا تابع آن عبارت را بر حسب یکی از متغیرهای مسئله به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از مشتق و ... اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم.

با توجه به نکته فوق، زمان حرکت را به صورت تابعی از x به دست می‌آوریم:



$$AD \text{ در حرکت در } t_1 = \frac{100-x}{4}$$

$$\triangle BCD : BD^2 = 40^2 + x^2 \Rightarrow BD = \sqrt{1600 + x^2}$$

$$BD \text{ در حرکت در } t_2 = \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1600 + x^2}$$

تابع زمان کل حرکت به صورت زیر است:

$$t = t_1 + t_2 = 25 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\sqrt{1600 + x^2}, \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$t' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{1600 + x^2}} = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2\sqrt{1600 + x^2}} = \frac{2x - \sqrt{1600 + x^2}}{4\sqrt{1600 + x^2}}$$

$$t' = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{1600 + x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{1600 + x^2} \Rightarrow 4x^2 = 1600 + x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 1600 \Rightarrow \sqrt{3}x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱

پله اول: برای تعیین بازه ای که $y = \frac{1}{f^2(x)}$ در آن اکیداً صعودی است باید مشتق را تعیین کرده و مثبت قرار دهیم:

$$y' = \frac{0 - 2f(x) \cdot f'(x)}{f^4(x)}$$

$$-2f(x) \cdot f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) < 0$$

سپس بازه‌هایی را انتخاب می‌کنیم که $f(x)$ و $f'(x)$ هم‌علامت نباشند با توجه به شکل $(-4, -2), (1, 3), (5, 8)$ مورد قبول هستند که اعداد صحیح -3 و 2 و 6 و 7 در این بازه‌ها قرار دارند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲

پله اول: مشتق تابع $f(x)$ را به دست آورده و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - (x^2 + a)(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{-2(x+a)}{(x-1)^3}$$

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a \quad (x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$$

چون تابع در $(-3, b)$ اکیداً صعودی است بنابراین a عددی مثبت و $-a < 1$ است.

x	$-\infty$	$-a$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+	-
$f(x)$				

پله دوم: حال جدول تعیین علامت $f'(x)$ را می‌نویسیم.

بنابراین تابع در بازه $(-a, 1)$ اکیداً صعودی می‌باشد. بنابراین $a=3$ و $b=1$ است. پس بیشترین مقدار $a+b$ برابر $3+1=4$.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳

پله اول: نقطه A ، نقطه بحرانی تابع است پس نقطه A روی تابع $f(x)$ قرار دارد.

$$A \in f(x) \Rightarrow x=a, y=b, f(x) = x + \frac{a}{x} + 1$$

$$\Rightarrow b = a + \frac{a}{a} + 1 \Rightarrow \boxed{b = a + 2}$$

پله دوم: نقطه A ، نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. با توجه به سؤال مشتق تابع $f(x)$ در $x=a$ برابر صفر می‌شود:

$$f(x) = x + \frac{a}{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{-a}{x^2}$$

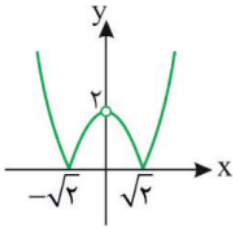
$$f'(a)=0 \Rightarrow 1 + \frac{-a}{a^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow b=3 \Rightarrow a+b=4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴

پله اول: نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار تابع در $x=0$ رسم می‌کنیم:



پله دوم: برای این که $x=0$ نقطهٔ مینیمم نسبی باشد، اما مینیمم مطلق نباشد، باید m در بازهٔ $(0, 2)$ قرار گیرد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵

پله اول: نمودار تابع $f(x)$ از نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ عبور می‌کند پس داریم:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a - b + c = 0 \\ f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a + 2c = 0 \Rightarrow \boxed{a = -c}$$

$$-1 + a - b + c = 0, a = -c \Rightarrow -1 + a - b - a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

پله دوم: نمودار تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ بر محور x مماس است پس شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x=1$ برابر صفر می‌باشد و لذا مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ صفر می‌شود.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0, b = -1 \Rightarrow 3 + 2a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{c = +1}$$

پله سوم:

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$a + b + c = -1 - 1 + 1 = -1$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 3 + 2 - 1 = 4$$

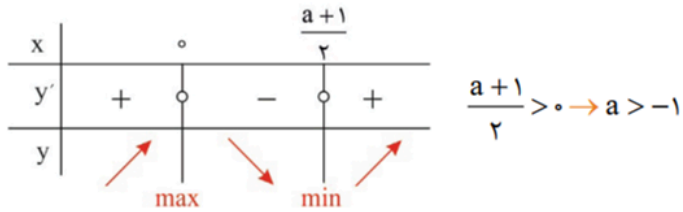
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶

پله اول: $f'(x)$ را به دست آورده و معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 12x^2 - 6(a+1)x = 0$$

$$6x(2x - a - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a+1}{2} \end{cases}$$

پله دوم: خط $y = -2$ بر نقطه min نسبی مماس است. پس عرض این نقطه مینیمم نسبی هم برابر -2 است. چون $f(0) = 0$ است، پسباید $f\left(\frac{a+1}{2}\right) = -2$ باشد بنابراین باید $\frac{a+1}{2} > 0$ باشد.

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = -2 \rightarrow 4\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 3(a+1)\left(\frac{a+1}{2}\right) = -2 \rightarrow \frac{(a+1)^2}{2} - \frac{3(a+1)^2}{2} = -2 \rightarrow \frac{-(a+1)^2}{2} = -2$$

$$\rightarrow (a+1)^2 = 4 \rightarrow a+1 = 2 \rightarrow a = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷

چون مساحت کل استوانه برابر 12π است، داریم:

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 12\pi \Rightarrow r^2 + rh = 6 \Rightarrow rh = 6 - r^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{6 - r^2}{r}$$

از طرفی می‌دانیم حجم استوانه از رابطه $\pi r^2 h$ به دست می‌آید، پس:

$$V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi r^2 \left(\frac{6 - r^2}{r} \right) = \pi(6r - r^3)$$

$$V' = \pi(6 - 3r^2) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{6 - r^2}{r} = \frac{6 - (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸

پله اول: مشتق تابع $f(x)$ را به دست آورده و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - (x^2 + a)(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{-2(x+a)}{(x-1)^3}$$

$$x+a=0 \rightarrow x=-a \quad (x-1)^3=0 \rightarrow x=1$$

چون تابع در $(-3, b)$ اکیداً صعودی است بنابراین a عددی مثبت و $-a < 1$ است.پله دوم: حال جدول تعیین علامت $f'(x)$ را می‌نویسیم.

x	$-\infty$	$-a$	1	$+\infty$	
f'(x)	-	○	+	0	-
f(x)		↘	↗	↘	

بنابراین تابع در بازه $(-a, 1)$ اکیداً صعودی می‌باشد. بنابراین $a=3$ و $b=1$ است. پس بیشترین مقدار $a+b$ برابر $3+1=4$.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹

پله اول: $f'(x)$ را به دست آورده و معادله $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 12x^2 - 6(a+1)x = 0$$

$$6x(2x - a - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{a+1}{2} \end{cases}$$

x					$\frac{a+1}{2}$
y'	+	○	-	○	+
y					
		↗	↘	↗	
		max		min	

پله دوم: خط $y=-2$ بر نقطه $\min$ نسبی مماس است. پس عرض این نقطه مینیممنسبی هم برابر -2 است. چون $f(0)=0$ است، پس باید $f\left(\frac{a+1}{2}\right)=-2$ باشد بنابراین باید

$$\frac{a+1}{2} > 0 \text{ باشد.}$$

$$\frac{a+1}{2} > 0 \rightarrow a > -1$$

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = -2 \rightarrow 4\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 3(a+1)\left(\frac{a+1}{2}\right) = -2 \rightarrow \frac{(a+1)^2}{2} - \frac{3(a+1)^2}{4} = -2 \rightarrow \frac{-(a+1)^2}{4} = -2$$

$$\rightarrow (a+1)^2 = 8 \rightarrow a+1=2 \rightarrow a=1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مختصات نقطه min نسبی در تابع f صدق می‌کند و همچنین طول نقطه min نسبی ریشه تابع f' است.

چون نقطه $A(1,1)$ مینیمم نسبی تابع f می‌باشد، پس $f(1)=1$ و $f'(1)=0$ می‌باشد و داریم:

$$f(1)=1 \Rightarrow \frac{2-m}{3-n}=1 \Rightarrow n-m=1 \Rightarrow n=m+1$$

$$f'(x)=\frac{(2)(3x^2-nx)-(6x-n)(2x-m)}{(3x^2-nx)^2}=\frac{-6x^2+6mx-mn}{(3x^2-nx)^2}$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow \frac{-6+6m-mn}{(3-n)^2}=0 \Rightarrow -6+6m-mn=0$$

$$\xrightarrow{n=m+1} -6+6m-m(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2-5m+6}{(m-2)(m-3)}=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \Rightarrow n=3 \\ m=3 \Rightarrow n=4 \end{cases}$$

اگر $m=2$ و $n=3$ باشد، تابع به شکل $f(x)=\frac{2x-2}{3x^2-3x}$ خواهد بود و $f(1)$ تعریف نشده می‌شود. پس نقطه $A(1,1)$ در آن صدق نخواهد کرد و فقط $m=3$ قابل قبول است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f'(x)=3x^2-2m, f''(x)=6x$$

ابتدا مشتق‌های اول و دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

حالا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=x^2(6x)+3x^2-2m=6x^3+3x^2-2m$$

$$\Rightarrow g'(x)=18x^2+6x$$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow 18x^2+6x=0 \Rightarrow 6x(3x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-\frac{1}{3}$$

با توجه به جدول تعیین علامت g' متوجه می‌شویم که $x=-\frac{1}{3}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است و چون مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۱ است، پس:

$$g\left(-\frac{1}{3}\right)=1 \Rightarrow 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2m=1 \Rightarrow m=-\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix} = -\frac{4}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲

ابتدا دامنهٔ $g(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$D_g = \mathbb{R} - \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$g'(x) = \frac{-2f'(x)}{f^2(x)}$$

با توجه به اینکه نقطه‌ای بحرانی است که در دامنهٔ تابع، مشتق تابع صفر یا تعریف نشده باشد، پس:

$$g'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \notin D_g$$

$$g'(x) = \text{تعریف نشده} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \rightarrow x = 0, 2 \notin D_g \\ f'(x) = \text{تعریف نشده} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

تنها نقطهٔ بحرانی $x = 1$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳

سرنخ

با استفاده از روابط مربوط به $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ ، تابع $f(x)$ را ساده کنید.می‌دانیم $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ و $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ است، پس ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{1 + \cos 2\pi x} = \frac{2 \sin \pi x \cos \pi x}{2 \cos^2 \pi x} = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} = \tan \pi x$$

چون تابع $f(x) = \tan \pi x$ در بازهٔ $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$ اکیداً صعودی است، پس مینیمم آن به ازای $x = \frac{1}{6}$ و ماکزیمم آن به ازای $x = \frac{1}{4}$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{6}\right) &= \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} & f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{6}\right) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \\ f\left(\frac{1}{4}\right) &= \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{aligned}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴

می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x-1)^2}$ می‌باشد بنابراین $f'(x)$ آن برابر است با:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1)^2 - (x^2 + 3)(2)(x-1)}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow \frac{-2(x+3)}{(x-1)^3} = 0$$

 $\rightarrow x = -3$ (نقطه بحرانی)حال در تعیین علامت $f'(x)$ داریم:

	-3	1
f'(x)	-	+
	o	n

$$\Rightarrow f(-3) = \frac{3}{4} \rightarrow R_{f(x)} = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

حال می‌دانیم دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x-1)^2}$ و $f'(x) = \frac{-2(x+3)}{(x-1)^3}$ برابر با $\mathbb{R} - \{1\}$ می‌باشد.

در نتیجه موارد «الف» و «پ» درست می‌باشند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$y = f(x) \xrightarrow{A(3, -2)} f(3) = -2$$

۷۵

مشتق در نقاط اکسترمم نسبی در صورت وجود برابر صفر است. ($f'(3) = 0$)

$$h(x) = \frac{f'(x)}{x^2 + 3} \rightarrow h'(x) = \frac{2f(x)f'(x)(x^2 + 3) - 2xf'(x)}{(x^2 + 3)^2} \xrightarrow{x=3} h'(3) = \frac{2f(3)f'(3)(12) - 6f'(3)}{(12)^2}$$

$$h'(3) = \frac{0 - 6(-2)}{144} = -\frac{1}{6}$$

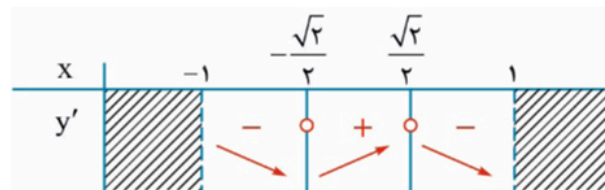
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا دامنه و سپس نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

۷۶

$$1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow D_y = [-1, 1]$$

$$y = 2x\sqrt{1-x^2} \rightarrow y' = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \rightarrow \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \rightarrow 2-4x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in D_y$$



بنابراین نقاط بحرانی این تابع به صورت $\left\{\pm 1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ است، حال مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

$$f(1) = f(-1) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad \text{max مطلق} \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \quad \text{Min مطلق}$$

$$\text{Max مطلق} - \text{Min مطلق} = 1 - (-1) = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

می‌دانیم $D(a, b)$ می‌باشد پس $A(a, 0)$ است پس داریم:

۷۷

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = (x_B - x_A)(y_D - y_A) \xrightarrow{b=\sqrt{a}} D_{ABCD} = (6-a)(\sqrt{a}-0) = -a\sqrt{a} + 6\sqrt{a}$$

بنابراین داریم:

$$S'_{ABCD} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt{a}} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{a} = \frac{-3}{\sqrt{a}} \Rightarrow a = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

می‌دانیم حجم مخروط از رابطه $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ به دست می‌آید:

$$L^2 = r^2 + h^2$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{r^2}$$

برای اینکه در ساخت قیف کمترین مقدار جنس مصرف شود، باید مساحت جانبی مخروط مینیمم شود.

$$S = \pi r L = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2}} = \pi \sqrt{r^4 + \frac{1}{r^2}}$$

$$\rightarrow S' = \pi \left(\frac{4r^3 + \frac{-2}{r^3}}{2\sqrt{r^4 + \frac{1}{r^2}}} \right) \rightarrow S' = 0 \rightarrow 4r^3 - \frac{2}{r^3} = 0 \rightarrow 4r^6 - 2 = 0 \rightarrow r^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow h = \frac{1}{r^2} = \sqrt[3]{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا مشتق‌های اول و دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2m \text{ و } f''(x) = 6x$$

حالا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(x) = x^2(6x) + 3x^2 - 2m = 6x^3 + 3x^2 - 2m \Rightarrow g'(x) = 18x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 18x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 6x(3x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{3}$$

با توجه به جدول تعیین علامت g' متوجه می‌شویم که $x = -\frac{1}{3}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است و چون مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۱ است، پس:

x		$-\frac{1}{3}$		0	
g'	+	0	-	0	+
g		↗	↘	↗	

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2m = 1 \Rightarrow m = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix} = -5$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰

تابع $f(x)$ روی بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی است، پس $f'(x)$ باید منفی باشد:

$$f(x) = \frac{(m-1)x-1}{-x+m+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{(m-1)(m+1)-1}^{m^2-2}}{(-x+m+1)^2} < 0.$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 < 0 \Rightarrow m^2 < 2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |m| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$$

در ضمن نباید ریشهٔ مخرج کسر یعنی $x = m+1$ درون بازه $(-\infty, 0)$ باشد، پس:
از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می‌گیریم $-1 \leq m < \sqrt{2}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱

می‌دانیم مختصات اکسترم‌های این تابع روی $y = \frac{2x+4}{2x+1}$ (هوپی‌تال تابع) نیز صادق‌اند. برای یافتن طول‌های نقاط اکسترم‌ها، کافی است ضابطهٔ

$$y = \frac{2x+4}{2x+1} \text{ را با معادلهٔ خط } y = 3x+1 \text{ قطع دهیم.}$$

$$\frac{2x+4}{2x+1} = 3x+1 \rightarrow 2x+4 = 6x^2 + 5x+1 \rightarrow 6x^2 + 3x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} P = \frac{c}{a} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲

می‌دانیم اگر $A(\alpha, \beta)$ اکسترم تابع $f = \frac{h}{g}$ باشد باید در هوپی‌تال تابع یعنی $\frac{h'}{g'}$ هم صدق کند پس:

$$\text{Hop}(f) = \frac{2x+a}{1} \xrightarrow{A(1, \frac{y}{3})} 2+a = \frac{y}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

با جایگذاری در f و شرط $f(1) = \frac{y}{3}$ داریم:

$$f(1) = \frac{1+\frac{1}{3}-\frac{11}{3}}{1+b} = \frac{y}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -\frac{y}{3} = (1+b)\frac{y}{3} \Rightarrow 1+b = -1 \Rightarrow b = -2$$

حالا تابع $f(x) = \frac{x^2 + \frac{x}{3} - \frac{11}{3}}{x-2}$ را داریم و دنبال اکسترم نسبی هستیم:

$$f'(x) = \frac{(2x + \frac{1}{3})(x-2) - 1(x^2 + \frac{x}{3} - \frac{11}{3})}{(x-2)^2} = 0 \xrightarrow{\text{ساده کنیم}}$$

$$2x^2 - 4x + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} - x^2 - \frac{x}{3} + \frac{11}{3} = 0 \xrightarrow{\text{مرتب}} x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرائب صفر است}} x = 1 \text{ یا } 3$$

پس اکسترم دوم در طول ۳ و عرض $f(3) = \frac{9+1-\frac{11}{3}}{3-1} = \frac{19}{3}$ قرار دارد و مجموع طول و عرض می‌شود:

$$3 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

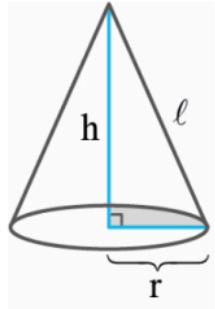
$$(f^r(x))' = \underset{-4, 5}{2f(x)} \underset{-3, 3, -2}{f'(x)}$$

$$-4 + 5 - 3 + 3 - 2 = -1$$

نقطه به طول $\frac{+1}{2}$ ، اکسترم نیست.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

می‌دانیم که حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{r^2}$$

کم‌ترین مقدار جنس یعنی مساحت جانبی مخروط را به حداقل برسانیم ($S = \pi r l$). مسأله از ما شعاع قاعده را برای این منظور خواسته است، پس تابع مساحت جانبی را بر حسب r می‌نویسیم:

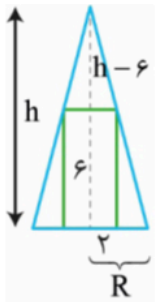
$$\ell^2 = r^2 + h^2 \xrightarrow{h=\frac{2}{r^2}} \ell = \sqrt{r^2 + \frac{4}{r^4}} \Rightarrow S = \pi r \left(\sqrt{r^2 + \frac{4}{r^4}} \right) = \pi \sqrt{r^4 + \frac{4}{r^2}}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی از S نسبت به r مشتق می‌گیریم و برابر با صفر قرار می‌دهیم. برای راحتی کار، کافی است عبارت زیر رادیکال را

$$4r^3 - \frac{4}{r^3} = 0 \Rightarrow 4r^6 = 4 \Rightarrow r^6 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \sqrt[6]{1} = 1$$

مینیمم کنیم:

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



$$\text{تاسی: } \frac{h-6}{h} = \frac{R}{2} \Rightarrow R = \frac{2(h-6)}{h}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4h^3}{(h-6)^2} \Rightarrow V' = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{h^2(h-12)}{(h-6)^3}$$

$\frac{h}{V}$	6	12	$+\infty$
	$+\infty$	min	$+\infty$

$$\Rightarrow h = 12 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow \frac{h}{R} = 6$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر رأس روی نمودار را $A(x, y)$ در نظر بگیریم، مقدار حجم مخروط‌های حاصل برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 y \xrightarrow{y=4-x^2} \frac{\pi}{3} x^2 (4-x^2) = \frac{\pi}{3} (4x^2 - x^4) \rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (8x - 4x^3) = 0 \rightarrow 4x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$$

ماکزیمم حجم برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 (4 - x^2) = \frac{\pi}{3} (\sqrt{2})^2 \left(4 - (\sqrt{2})^2 \right) = \frac{\pi}{3} (2)(2) = \frac{4\pi}{3}$$

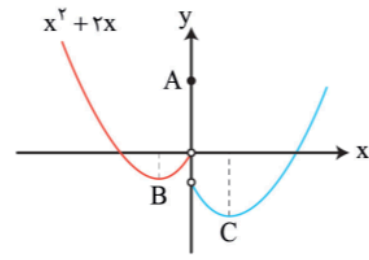
(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷

نقاط بحرانی تابع f در $B(-1, -1)$ و $C(2, b-4)$ و $A(0, b)$ هستند و داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ b & -1 & b-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |0 - b + 4 + 2b - 0 - (-2) - (-b)|$$

$$\Rightarrow |b + 3| = 6 \Rightarrow b = 3 \text{ یا } -9$$

به ازای $b = -9$ عرض مینیمم مطلق تابع -13 است.به ازای $b = 3$ عرض مینیمم مطلق -1 است.

$$\Rightarrow \text{جمع} = -14$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸

دامنه تابع $[0, a]$ است و داریم:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} + \frac{-1}{2\sqrt{a-x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{2\sqrt{a-x}} \Rightarrow 2x = 4(a-x)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2a}{3}$$

عرض‌های نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم:

$$y = \sqrt{2x} + \sqrt{a-x} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{2a}{3} & a \\ \hline y & \sqrt{a} & \sqrt{3a} & \sqrt{2a} \end{array}$$

پس مجموع عرض‌های ماکزیمم و مینیمم مطلق $\sqrt{3a} + \sqrt{a}$ یا $(\sqrt{3} + 1)\sqrt{a}$ است که باید ۶ شود. پس $\sqrt{a} = (\sqrt{3} - 1) \times 3$ و بنابراین

$$a = 9 \underbrace{(4 - 2\sqrt{3})}_{\text{تقریباً } 0.6}$$

و جزء صحیح a برابر ۵ می‌شود.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹

$$\text{تابع هزینه} = 3k\sqrt{36 + x^2} + k(12 - x)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 3k \frac{2x}{2\sqrt{36 + x^2}} + -k = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x^2}{36 + x^2} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 8x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: برای آن که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید مشتق آن منفی باشد.

$$f(x) = \frac{ax + 6}{x + a + 1}$$

$$f'(x) = \frac{a(x + a + 1) - (ax + 6)}{(x + a + 1)^2} = \frac{a^2 + a - 6}{\underbrace{(x + a + 1)^2}_{\geq 0 \text{ همواره}}}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 < 0 \Rightarrow (a + 3)(a - 2) < 0 \Rightarrow -3 < a < 2 \quad (\text{I})$$

گام دوم: هم‌چنین ریشهٔ مخرج کسر، نباید در بازهٔ $(-\infty, 0)$ باشد؛ پس:

$$\text{ریشهٔ مخرج کسر: } x = -a - 1$$

$$0 \leq -a - 1 \Rightarrow a \leq -1 \quad (\text{II})$$

گام سوم: بین شرط‌های (I) و (II) اشتراک می‌گیریم.

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I) و (II)}} -3 < a \leq -1 \quad (*)$$

محدودهٔ (*) شامل دو عدد صحیح -1 و -2 است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: تابع f در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال یعنی $x = 0$ ، مشتق بی‌نهایت دارد (مشتق ناپذیر است)، پس $x = 0$ یکی از نقاط بحرانی تابع است.

گام دوم: ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $x = 20$ ، نقطهٔ زاویه‌دار (گوشه‌ای) است و تابع در آن مشتق ناپذیر است؛ پس $x = 20$ هم یکی از نقاط بحرانی است.

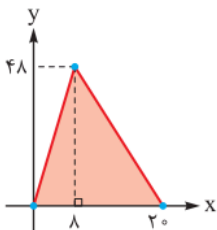
گام سوم: حالا $f'(x) = 0$ را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که عبارت داخل قدرمطلق چه با علامت مثبت و چه با علامت منفی از قدرمطلق خارج شود، تأثیری بر ریشهٔ $f'(x) = 0$ ندارد، پس فرض می‌کنیم با علامت مثبت از قدرمطلق خارج شود.

$$f(x) = (x - 20) \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 20x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{40}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{40}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \frac{5x - 40}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 5x - 40 = 0 \Rightarrow x = 8$$

پس $x = 8$ طول نقطهٔ بحرانی سوم است.

گام چهارم: عرض نقاط بحرانی را به دست آورده و این نقاط را روی دستگاه مختصات نشان می‌دهیم.



$$x = 0 \Rightarrow f(0) = |0 - 20| \times \sqrt[3]{0^2} = 0$$

$$x = 20 \Rightarrow f(20) = |20 - 20| \times \sqrt[3]{20^2} = 0$$

$$x = 8 \Rightarrow f(8) = |8 - 20| \times \sqrt[3]{8^2} = 48$$

گام پنجم: مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با $\frac{20 \times 48}{2} = 480$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: ابتدا تابع g را ساده می‌کنیم.

$$g(x) = 2(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 2(1 - \cos^2 x) = 2\sin^2 x$$

گام دوم: برد تابع g را به دست می‌آوریم. توجه کنید که برای تابع $f(g(x))$ ، خروجی‌های تابع g ، ورودی‌های تابع f خواهند بود.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2\sin^2 x \leq 2$$

به عبارت دیگر ورودی‌های تابع f در بازه $[0, 2]$ خواهند بود.

گام سوم: حال باید Min و Max تابع f را در دامنه $[0, 2]$ به دست آوریم. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. برای این منظور

$$f'(x) \text{ را حساب کرده و ریشه‌های } f'(x) = 0 \text{ را به دست می‌آوریم.}$$

$$f(x) = x^3 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

توجه کنید که تنها $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ در محدوده $[0, 2]$ قرار دارد و قابل قبول است.

گام چهارم: نقاط بحرانی تابع $x = 0$ ، $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ و $x = 2$ هستند. مقدار تابع f را در این نقاط به دست می‌آوریم.

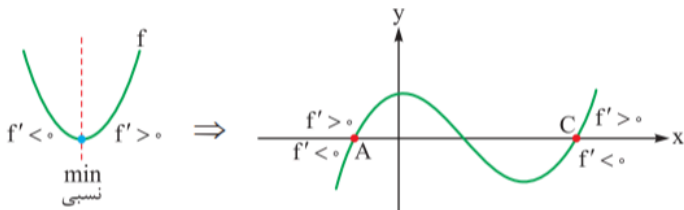
$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow \text{Max} \\ f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 1 = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \frac{16}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Min} \\ f(2) = 2^3 - 4(2) + 1 = 1 \Rightarrow \text{Max} \end{cases}$$

گام پنجم: مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)$ برابر با $2 - \frac{16}{3\sqrt{3}}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: با توجه به نمودار تابع f' ، از آن جایی که تابع در نقاط A و C از مقادیر منفی به مثبت تغییر علامت داده است؛

پس این نقاط طول نقاط مینیمم نسبی تابع f هستند.



پس نقاط مینیمم نسبی تابع f ، $(A, f(A))$ و $(C, f(C))$ هستند.

گام دوم: فاصله دو نقطه مینیمم نسبی تابع f را حساب کرده و برابر با ۱۰ قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{(C-A)^2 + (f(C)-f(A))^2} = 10 \Rightarrow (C-A)^2 + (f(C)-f(A))^2 = 100 \quad (۱)$$

گام سوم: طبق صورت سؤال $AB = BC = 3$ است، پس $AC = AB + BC = 6$ می‌شود، یعنی $C - A = 6$ است. در (۱) جای گذاری می‌کنیم.

$$6^2 + (f(C)-f(A))^2 = 100 \Rightarrow (f(C)-f(A))^2 = 64 \Rightarrow |f(C)-f(A)| = 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: طبق نمودار $f(0) = 5$ است؛ پس:

$$0^2 + a(0^2) + b(0) + c = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + ax^2 + bx + 5$$

گام دوم: هم‌چنین طبق نمودار $f(-1) = 0$ است؛ پس:

$$(-1)^2 + a(-1)^2 + b(-1) + 5 = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 5 = 0 \Rightarrow a - b = -4 \quad (1)$$

گام سوم: طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f برابر با $x = -1$ است؛ پس $f'(-1)$ باید صفر باشد، از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 2(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow 2 - 2a + b = 0 \Rightarrow 2a - b = 2 \quad (2)$$

گام چهارم: معادلات (۱) و (۲) را در دستگاه حل می‌کنیم تا a و b را به دست آوریم:

$$\xrightarrow{x(-1)} \begin{cases} a - b = -4 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 4 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع:}} a = 7, 7 - b = -4 \Rightarrow b = 11$$

$$\text{در نتیجه: } f(x) = x^2 + 7x^2 + 11x + 5 \quad \text{و} \quad f'(x) = 2x^2 + 14x + 11$$

گام پنجم: از معادلهٔ $f'(x) = 0$ ، طول اکسترمم نسبی دیگر تابع که از نوع ماکزیمم نسبی است را به دست می‌آوریم.

$$2x^2 + 14x + 11 = 0 \xrightarrow[x_1 = -1, x_2 = -\frac{C}{A}]{B=A+C} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را ساده تر می نویسیم.

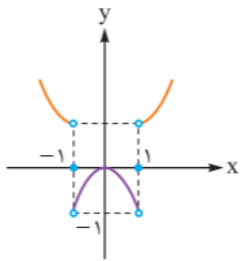
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}(x-1) = x-1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\frac{x}{x}(x-1) = -x+1 & , x > 0 \end{cases}$$

گام دوم: تابع $f \circ g$ را تشکیل می دهیم.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)-1 & , 0 < g(x) \\ 0 & , g(x) = 0 \\ -g(x)+1 & , g(x) < 0 \end{cases}$$

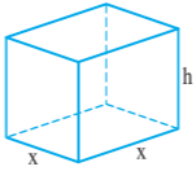
$$\Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 1-x^2-1 = -x^2 & , \boxed{0 < 1-x^2} \Rightarrow \boxed{x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1} \\ 0 & , \boxed{1-x^2 = 0} \Rightarrow \boxed{x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1} \\ -1+x^2+1 = x^2 & , \boxed{1-x^2 < 0} \Rightarrow \boxed{1 < x^2 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1} \end{cases}$$

گام سوم: نمودار تابع $f \circ g$ را رسم می کنیم.



گام چهارم: طبق نمودار، تابع تنها یک ماکزیمم نسبی دارد که در $x = 0$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



گام اول: ابتدا شکل سؤال را رسم می‌کنیم و متغیرهای سؤال را بر روی آن نشان می‌دهیم. ضلع مربع قاعده را با x و یال دیگر مکعب مستطیل را h می‌نامیم.

گام دوم: می‌خواهیم هزینه مصالح مورد نیاز برای ساخت این مخزن را حداقل کنیم، پس رابطه اصلی در این سؤال مربوط به هزینه مصالح است که آن را با C نشان می‌دهیم و برحسب هزار تومان برابر است با:

$$C = 100x^2 + 40(4xh) \quad (1) \quad \text{رابطه اصلی: (قیمت مصالح دیوارهای کناری) + (قیمت مصالح کف)}$$

گام سوم: از آنجایی که رابطه (۱) برحسب دو متغیر است، ابتدا باید با استفاده از یک رابطه کمکی آن را تک‌متغیره کنیم. این رابطه کمکی از حجم مخزن می‌آید که مقدار ثابت 10 مترمکعب است. در واقع حجم مخزن ارتباط بین x و h را برای ما مشخص می‌کند:

$$x^2h = 10 \Rightarrow h = \frac{10}{x^2} \quad (2) \quad \text{رابطه کمکی}$$

گام چهارم: از رابطه (۲) مقدار h را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم تا رابطه اصلی فقط برحسب x شود و بتوانیم از آن مشتق بگیریم و مینیمم آن را مشخص کنیم.

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} C(x) = 100x^2 + 40\left(4x \times \frac{10}{x^2}\right) = 100x^2 + \frac{1600}{x} \quad (3)$$

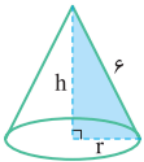
گام پنجم: از رابطه (۳) مشتق می‌گیریم و ریشه‌های $C'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$C'(x) = 200x - \frac{1600}{x^2} \xrightarrow{C'(x)=0} 200x - \frac{1600}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{x^2} \xrightarrow{x \neq 0} x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

گام ششم: با قراردادن $x = 2$ در $C(x)$ ، حداقل هزینه مصالح به دست می‌آید.

$$C(2) = 100(2)^2 + \frac{1600}{2} = 400 + 800 = 1200 = 1200 \text{ هزار تومان} = 12 \text{ میلیون تومان}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



گام اول: شکل سؤال را رسم کرده و مجهولات سؤال را روی آن نشان می‌دهیم. شعاع قاعده مخروط را r و ارتفاع آن را با h مشخص می‌کنیم.

گام دوم: حجم مخروط بیشترین مقدار شده است، پس رابطه اصلی در این سؤال مربوط به حجم مخروط است، آن را می‌نویسیم.

$$\text{رابطه اصلی: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (1)$$

گام سوم: رابطه کمکی در این سؤال که ارتباط بین r و h را مشخص می‌کند، رابطه فیثاغورس در مثلث رنگی شکل صفحه قبل:

$$\text{رابطه کمکی: } r^2 + h^2 = 6^2 = 36 \Rightarrow r^2 = 36 - h^2 \quad (2)$$

گام چهارم: رابطه (۲) را در رابطه (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا رابطه اصلی تنها برحسب h شود.

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} V(h) = \frac{1}{3}\pi(36 - h^2)h \Rightarrow V(h) = 12\pi h - \frac{\pi}{3}h^3 \quad (3)$$

گام پنجم: از رابطه (۳) مشتق می‌گیریم و ریشه‌های $V'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$V'(x) = 12\pi - \pi h^2 \xrightarrow{V'(x)=0} 12\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \xrightarrow{(2)} r^2 = 36 - 12 = 24 \Rightarrow r = 2\sqrt{6}$$

گام ششم: خواسته سؤال $\frac{r}{h}$ است که برابر با $2\sqrt{2}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: طبق نمودار تابع f' ، مقدار f' در $\mathbb{R}$ موجود است و در سه نقطه به طول‌های ۲، صفر و -۲ مقدار f' برابر با صفر است؛ پس تابع f سه نقطه بحرانی به طول‌های ۲، صفر و -۲ دارد.

گام دوم: از آنجایی که در $x = -2$ و $x = 2$ مقدار f' از منفی به مثبت تغییر علامت داده است؛ این نقاط مینیمم نسبی تابع هستند. همچنین طبق ضابطه f ، $f(2) = f(-2)$ است، پس طبق صورت سؤال، عرض تابع در هر دو نقطه آن‌ها -۱ است.

گام سوم: چون در $x = 0$ مقدار f' از مثبت به منفی تغییر علامت داده است؛ پس این نقطه ماکزیمم نسبی تابع است و عرض آن ۱ است.

گام چهارم: پس مختصات نقاط بحرانی تابع f ، $C \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $A \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$ هستند.

گام پنجم: مساحت مثلثی که با سه رأس A ، B و C ساخته می‌شود، برابر است با:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(-2)(1) + (0)(-1) + (2)(-1) - (-1)(0) - (2)(1) - (-2)(-1)|$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |-2 - 2 - 2 - 2| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا f' را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

گام دوم: چون اکسترم‌های تابع f روی محورهای مختصات قرار دارند، پس طول یکی از نقاط اکسترم نسبی $x = 0$ است؛ پس:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 3(0)^2 - 2a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - ax^2 + 4, f'(x) = 3x^2 - 2ax$$

گام سوم: طول نقطه اکسترم دیگر را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(3x - 2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2a}{3} \end{cases}$$

گام چهارم: نقطه اکسترم به طول $x = \frac{2a}{3}$ روی محور x قرار دارد، یعنی $f(\frac{2a}{3}) = 0$ است.

$$\left(\frac{2a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \frac{8a^3}{27} - \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{8a^3 - 12a^3}{27} = -4 \Rightarrow \frac{-4a^3}{27} = -4 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا عبارت لگاریتمی $f(x) = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_9 x^2$ را با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \log_{x^{\frac{1}{2}}} 3 + \log_{3^2} x^2 = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}}}_{(2)} \log_x 3 + \frac{2}{2} \log_3 x = 2 \times \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{2} \log_3 x$$

گام دوم: از تغییر متغیر $t = \log_3 x$ استفاده می‌کنیم، از آن جایی که $x > 1$ است، پس $t = \log_3 x > 0$ می‌شود.

$$f(t) = \frac{2}{t} + \frac{2}{2}t, \quad t > 0$$

گام سوم: برای یافتن کم‌ترین مقدار $f(t)$ از آن مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

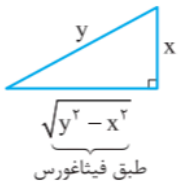
$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{2} \xrightarrow{f'(t)=0} -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{t^2} = \frac{2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{4}{2} \xrightarrow{t>0} t = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

گام چهارم: پس طول نقطه بحرانی تابع $f(t)$ برابر با $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ است، با جای گذاری آن در تابع، مینیمم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f_{\min} = \frac{2}{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \frac{2}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: شکل زیر را طبق صورت سؤال رسم می‌کنیم. طول ضلع قائمه را x و وتر را y در نظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال داریم:



$$x + y = 9 \Rightarrow y = 9 - x \quad (1)$$

گام دوم: رابطه مساحت مثلث را می‌نویسیم.

$$S = \frac{1}{2} x \times \sqrt{y^2 - x^2}$$

گام سوم: با استفاده از (۱)، مساحت را بر حسب x می‌نویسیم.

$$S = \frac{1}{2} x \times \sqrt{(9-x)^2 - x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{81 - 18x} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{81x^2 - 18x^3}$$

گام چهارم: از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و از حل $S'(x) = 0$ ، نقطه(های) بحرانی تابع S را مشخص می‌کنیم.

$$S'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(81x^2 - 18x^3)'}{\sqrt{81x^2 - 18x^3}} \xrightarrow{S'(x)=0} (81x^2 - 18x^3)' = 0 \Rightarrow 162x - 54x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(162 - 54x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق} \\ x = \frac{162}{54} = 3 \end{cases}$$

گام پنجم: با جای گذاری $x = 3$ در تابع $S(x)$ ماکزیمم مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S(3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{81 - 18(3)} = \frac{3}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: از f مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

گام دوم: طبق گفته سؤال، $x = -1$ ، طول نقطه اکسترمم نسبی f است، پس مقدار $f'(x)$ در $x = -1$ باید برابر صفر شود:

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \xrightarrow{f'(x)=3x^2+2ax+9} 3 - 2a + 9 = 0 \Rightarrow -2a + 12 = 0 \Rightarrow a = 6$$

گام سوم: با جای گذاری $a = 6$ در f' ، ریشه دیگر f' را پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{اولی + آخری = وسطی}} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = -\frac{9}{3} = -3 \end{cases}$$

گام چهارم: بنابراین طول نقطه اکسترمم نسبی دیگر، $x = -3$ است. از طرفی عرض این نقطه هم $y = -1$ است، پس مختصات نقطه اکسترمم نسبی دیگر به صورت $A(-3, -1)$ می‌شود.

گام پنجم: نقطه A روی تابع f قرار دارد:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b \xrightarrow{A(-3, -1)} -1 = -27 + 54 - 27 + b \Rightarrow b = -1$$

بنابراین $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ می‌شود.

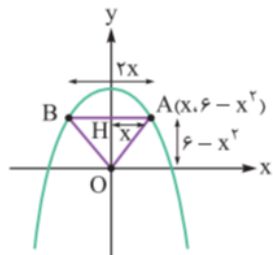
گام ششم: در آخر، مقدار $f''(b) = f''(-1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x + 12 \Rightarrow f''(-1) = -6 + 12 = 6$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



گام اول: نقطه A (با طول مثبت) روی منحنی $y = 6 - x^2$ قرار دارد، پس مختصات این نقطه را به صورت $A(x, 6 - x^2)$ فرض می‌کنیم. با این کار طول ارتفاع OH برابر عرض نقطه A ، یعنی $6 - x^2$ و طول AH برابر طول نقطه A ، یعنی x می‌شود، پس طول قاعده AB برابر $2x$ می‌شود.

گام دوم: تابع مساحت مثلث را می‌نویسیم:

$$S(x) = \frac{OH \cdot AB}{2} = \frac{(6 - x^2) \times 2x}{2} = 6x - x^3$$

گام سوم: می‌خواهیم بیشترین مساحت مثلث را پیدا کنیم. از S مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط اکسترمم به دست آید:

$$S'(x) = 6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{\text{فرض کردیم طول نقطه مثبت است.}} x = \sqrt{2}$$

گام چهارم: با جای گذاری $x = \sqrt{2}$ در $S(x)$ ، حداکثر مساحت مثلث حاصل می‌شود:

$$S(x) = (6 - x^2) \times x \Rightarrow S(\sqrt{2}) = (6 - 2) \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: از f مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = (x^{\frac{2}{3}} + a)\sqrt[3]{x} + bx \Rightarrow f(x) = \underbrace{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x}}_{x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = x^1} + a\sqrt[3]{x} + bx$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} + b \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} + \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} + b$$

گام دوم: دامنه f ، $\mathbb{R}$ است، پس همه ریشه‌های صورت و مخرج f' ، طول نقاط بحرانی هستند. در مخرج f' ، $\sqrt[3]{x^2}$ را داریم که به ازای $x = 0$ صفر می‌شود. حالا چون می‌خواهیم هیچ نقطه بحرانی نداشته باشیم، پس مخرج هم نباید ریشه داشته باشد که این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که در مخرج $\sqrt[3]{x^2}$ نداشته باشیم، پس باید $a = 0$ شود.

گام سوم: به ازای $a = 0$ ، ضابطه f' به صورت $f'(x) = \frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} + b$ می‌شود. می‌خواهیم صورت f' هم ریشه نداشته باشد. دقت کنید که $x\sqrt[3]{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} + b \geq b$ هم علامت‌اند، پس $x\sqrt[3]{x} \geq 0$ می‌شود، بنابراین داریم:

حالا واضح است که برای این که صورت f' ، یعنی $\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} + b$ ریشه نداشته باشد، باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد که در این جا چون $\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} + b \geq b$ است، این عبارت باید همواره مثبت باشد که با توجه به آن کافی است $b > 0$ باشد؛ پس جواب ۱ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: ابتدا دامنه تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ \sqrt{x+2} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} D_f = [-2, 2]$$

گام دوم: حالا مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم تا نقاط بحرانی این تابع را در بازه $(-2, 2)$ پیدا کنیم:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} + 2\sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{2\sqrt{x+2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \xrightarrow{x \neq -2} x = \sqrt{2-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 = 2-x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

غق

گام سوم: پس $x = 1$ ، طول نقطه بحرانی تابع در بازه $(-2, 2)$ است. برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق تابع، مقدار $x = 1$ و $x = \pm 2$ که نقاط انتهایی دامنه f هستند را در تابع f جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(1) = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$f(2) = 2\sqrt{4} = 4$$

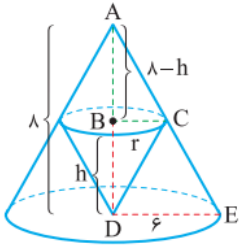
$$f(-2) = 0$$

پس $\max(f) = 3\sqrt{3}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: ارتفاع و شعاع مخروط کوچک را به ترتیب برابر با h و r در نظر می گیریم. مقادیر را

روی شکل مشخص می کنیم:



گام دوم: در دو مثلث ABC و ADE ، رابطه تالس برقرار است:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\lambda - h}{\lambda} \Rightarrow r = \frac{\rho}{\lambda}(\lambda - h)$$

گام سوم: حجم مخروط کوچک تر برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\rho}{\lambda}(\lambda - h) \right)^2 h = \frac{\pi \rho^2}{3\lambda^2} (\lambda - h)^2 h$$

گام چهارم: بیشترین حجم مخروط کوچک را می خواهیم؛ پس از V ، نسبت به h مشتق می گیریم تا h بهینه به دست آید:

$$V' = \frac{\pi \rho^2}{3\lambda^2} (-2(\lambda - h)h + (\lambda - h)^2) = 0 \Rightarrow (\lambda - h)(2h + \lambda - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = \lambda \\ h = \frac{\lambda}{3} \end{cases}$$

گام پنجم: برای مخروط کوچک تر، $h = \frac{\lambda}{3}$ قابل قبول است. برای این مقدار از h حجم برابر است با:

$$V_{\max} = \frac{\pi \rho^2}{3\lambda^2} \left(\lambda - \frac{\lambda}{3} \right)^2 \times \frac{\lambda}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{64 \times 4}{9} = \frac{128\pi}{9}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: در $x = 0$ ، شیب خط مماس بر نمودار تابع f ، برابر با صفر است؛ بنابراین مشتق تابع f در این نقطه، صفر می شود:

$$f(x) = x + a + \sqrt[3]{1 + bx} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{3b}{\sqrt[3]{(1 + bx)^2}} \Rightarrow f'(0) = 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

گام دوم: پس $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$ می شود. حالا نقطه مینیمم نسبی را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2}} \Rightarrow \sqrt[3]{(1 - x)^2} = 1 \Rightarrow (1 - x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x = 1 \\ 1 - x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{طول نقطه ماکزیمم نسبی} \\ x = 2 \Rightarrow \text{طول نقطه مینیمم نسبی} \end{cases}$$

$$f(2) = 2 + a + \sqrt[3]{1 - 2} = 2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

گام سوم: با توجه به نمودار، $f(2) = 0$ است:

$$\Rightarrow f(x) = x + 1 + \sqrt[3]{1 - x}$$

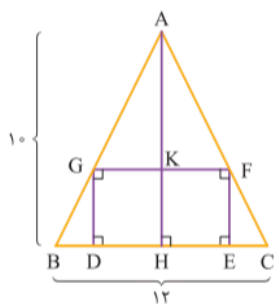
$$y_{\max} = f(0) = 1 + 1 = 2$$

گام چهارم: عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۸

پاسخ تشریحی

گام اول: فرض می‌کنیم $KH = EF = DG = x$ باشد. در این صورت $AK = 10 - x$ می‌شود.از طرفی، فرض می‌کنیم $FG = y$ باشد.گام دوم: قضیه تالس را در دو مثلث ABC و AFG می‌نویسیم:

$$\frac{AK}{AH} = \frac{GF}{BC} \Rightarrow \frac{10-x}{10} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = \frac{6}{5}(10-x)$$

$$S_{GFED} = xy = x \times \frac{6}{5}(10-x) = \frac{6}{5}(10x - x^2)$$

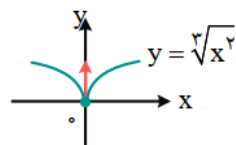
گام سوم: حالا رابطه مساحت مستطیل $GFED$ را می‌نویسیم:

$$S' = \frac{6}{5}(10 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 5$$

برای این که بیشترین مقدار مساحت مستطیل را به دست آوریم، باید از S مشتق بگیریم:

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{6}{5}(50 - 25) = 30$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



۱۰۹

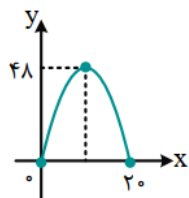
اولاً: ریشه ساده داخل قدرمطلق، طول نقطه گوشه‌ای است، یعنی $x = 20$.ثانیاً: در $x = 0$ که ریشه زیر رادیکال است، مشتق وجود ندارد (نیم‌مماس عمودی).

حالا نقاطی که مشتق در آن‌جا صفر است را می‌یابیم:

$$f(x) = (x - 20)\sqrt{x^2} = x\sqrt{x^2} - 20\sqrt{x^2} = x^{\frac{5}{2}} - 20x^{\frac{2}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{40}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}\sqrt{x^2} - \frac{40}{2}\sqrt{x} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{5x - 40}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 5x - 40 = 0 \Rightarrow x = 8$$

پس این تابع سه نقطه بحرانی به طول‌های ۰ و ۸ و ۲۰ دارد:

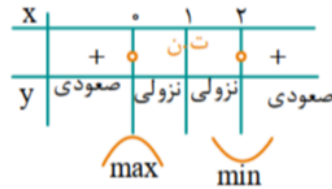


$$f(x) = |x - 20|\sqrt{x^2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 8 \rightarrow y = 48 \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{1}{2}(20)(48) = 480 \\ x = 20 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مشتق بگیریم تا جدول تغییرات رسم کنیم: (حواسمان باشد $X=1$ در دامنه نیست)

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$



بررسی گزینه‌ها:

۱ نادرست ← چون $X=1$ ریشه مخرج است. بازه‌های قبل و بعد آن را جدا جدا اعلام می‌کنیم، اینطوری: $(0,1)$, $(1,2)$

۲ نادرست ← این تابع فقط دو نقطه بحرانی به طول‌های ۰ و ۲ دارد. ($X=1$ در دامنه نیست)

۳ نادرست ← $X=2$ طول نقطه $\min$ نسبی است.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow \max(0,0) \\ f(2) = 4 \Rightarrow \min(2,4) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۴ درست ←

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

دامنه هر دو تابع $-2 \leq X \leq 2$ است. مشتق بگیریم از آن‌ها:

$$1) f(x) = x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow 4-x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\text{عرض نقاط بحرانی}} \begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(-\sqrt{2}) = -2 = \min \\ f(\sqrt{2}) = 2 = \max \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$$2) g(x) = x + \sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4-x^2 = x^2$$

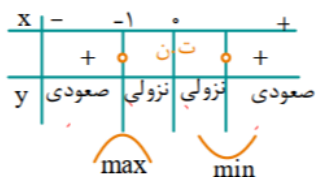
$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\text{عرض نقاط بحرانی}} \begin{cases} f(-2) = -2 = \min \\ f(-\sqrt{2}) = 0 \\ f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = \max \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

پس مقدار ماکزیمم مطلق دو تابع متفاوت است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - x^{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt[3]{x^3} + 4x - 3}{3\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{8x^3 + 4x - 3}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ریشه‌های صورت ۱- و $\frac{3}{4}$ هستند ($a+c=b$) و ریشه مخرج هم $X=0$ بوده و مضاعف است. با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{در } X = \frac{3}{4} \text{ مینیمم نسبی دارد}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

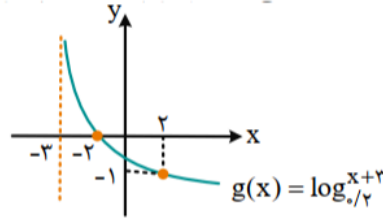
ابتدا برد تابع داخل پیرانتز یعنی f را می‌یابیم. سپس نمودار تابع بیرون پیرانتز یعنی g را با دامنه جدیدش (همان برد f) در نظر گرفته و $\min$ و $\max$ آن را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x} \xrightarrow{D_f=[*,4]} \begin{cases} f(0) = -2 \\ f(4) = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{همواره صعودی است}} R_f = [-2, 2]$$

حالا تابع $g(x) = \log_{\frac{x+3}{2}}$ را با دامنه $[-2, 2]$ در نظر می‌گیریم. این تابع همواره نزولی است چون پایه لگاریتم بین صفر و یک است.

$$g(-2) = \log_{\frac{1}{2}} = 0$$

$$g(2) = \log_{\frac{5}{2}} = \log_{\frac{1}{\frac{2}{5}}} = -\log_{\frac{2}{5}} = -1$$



$$R_{gof} = [-1, 0]$$

پس مینیمم مطلق برابر -1 و ماکزیمم مطلق برابر با صفر است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -3$$

اولاً: تابع از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد:

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b \xrightarrow{f'(1)=0} 2 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -2$$

ثانیاً: $x=1$ طول اکسترمم نسبی است، پس $f'(1) = 0$

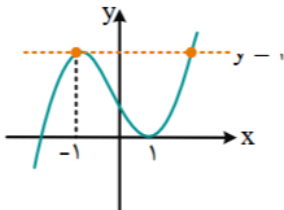
$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \xrightarrow{x(-1)} \begin{cases} a + b = -3 \\ -a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = -3$$

با حل دستگاه مقدار a و b را می‌یابیم:

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = x^2 - 3x + 2$ می‌باشد. حالا طول نقطه $\max$ نسبی را می‌یابیم:

$$f'(x) = 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$$

طبق شکل خط $y=4$ در دو نقطه با نمودار f برخورد دارد.



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

فرض می‌کنیم عرض اکسترمم برابر k باشد، پس خط $y=k$ بر نمودار f مماس است، یعنی معادله $f(x) = k$ ریشه مضاعف دارد:

$$\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 2} = k \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = kx^2 + kx + 2k \Rightarrow (k-1)x^2 + (k-5)x + 2k-3 = 0$$

معادله فوق ریشه مضاعف دارد، پس: $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 : (k-5)^2 - 4(k-1)(2k-3) = 0 \Rightarrow (k^2 - 10k + 25) - 4(2k^2 - 5k + 3) = 0$$

$$\Rightarrow -7k^2 + 10k + 13 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب عرض اکسترممها} = k_1 k_2 = \frac{c}{a} = -\frac{13}{7}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

عبارت زیر رادیکال را کمی ساده می‌کنیم:

۱۱۶

$$3 \log_{\Delta} x^2 - \log_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{2}} = 6 \log_{\Delta} x - \log_{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}^{\Delta^{-1}} = 6 \log_{\Delta} x + 2 \log_x^{\Delta}$$

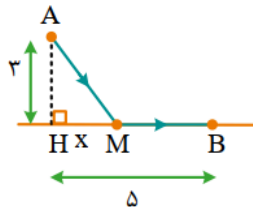
اگر فرض کنیم $a = 6 \log_{\Delta} x$ و $b = 2 \log_x^{\Delta}$ ، حاصل ضرب b و a عددی ثابت می‌شود:

$$a \times b = 6 \log_{\Delta} x \times 2 \log_x^{\Delta} = (6 \times 2) (\log_{\Delta} x \times \log_x^{\Delta}) = 12 \Rightarrow a \times b = 12$$

پس مجموع آن‌ها وقتی مینیمم می‌شود که با هم برابر باشند، یعنی $a = b = \sqrt{12}$ ، بنابراین:

$$a + b = \sqrt{12} + \sqrt{12} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} \Rightarrow A_{\min} = \sqrt{4\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



طول AM را به کمک فیثاغورس می‌یابیم، طول BM هم که تابلو است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{AM هزینه} = (\Delta) \sqrt{9 + x^2} \\ \text{BM هزینه} = (4)(\Delta - x) \end{cases}$$

پس کل هزینه‌ها $\Delta \sqrt{9 + x^2} + 4(\Delta - x)$ است که می‌خواهیم مینیمم شود:

$$\text{مشتق} = 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} \right) - 4 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\sqrt{9 + x^2}} = 4 \xrightarrow{\text{توان 2}} \frac{2\Delta x^2}{9 + x^2} = 16$$

$$\Rightarrow 2\Delta x^2 = 144 + 16x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{144}{9} = 16 \Rightarrow x = 4$$

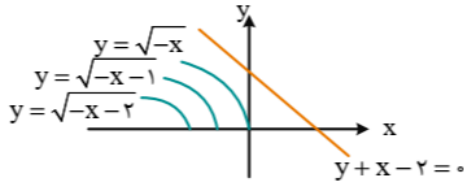
بنابراین به ازای $x = 4$ کمترین هزینه را خواهیم داشت:

$$\text{هزینه} = \Delta \sqrt{9 + x^2} + 4(\Delta - x) \xrightarrow{x=4} \text{هزینه} = \Delta \sqrt{9 + 16} + 4(\Delta - 4) = 29$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۷

به وضعیت نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ و خط $y + x - 2 = 0$ دقت کنید، اگر نمودار $y = \sqrt{-x}$ به سمت چپ انتقال یابد، فاصله اش از خط زیاد می شود، پس باید در تابع $y = \sqrt{-x - [x^2]}$ مقدار $[x^2]$ را صفر بگذاریم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ انتقال به چپ نداشته باشد.



نقطه $A(x, y)$ را روی نمودار $y = \sqrt{-x}$ در نظر گرفته، فاصله آن را تا خط $y + x - 2 = 0$ به دست می آوریم:

$$AH = \left| \frac{y_A + x_A - 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{-x} + x - 2}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{-x} + x - 2| \quad (*)$$

می خواهیم فاصله مینیمم باشد، پس $(AH)' = 0$:

$$(AH)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{2\sqrt{-x}} + 1 \right) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

بنابراین کوتاه ترین فاصله به ازای $x = -\frac{1}{4}$ به دست می آید:

$$\xrightarrow{(*)} AH = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - 2 \right| = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

حجم مخزن $\frac{40}{3}\pi$ است، پس:

$$V_{\text{مخزن}} = V_{\text{نیم کره}} + V_{\text{استوانه}} \Rightarrow \frac{40}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \xrightarrow{\div \pi, \times 3} 40 = 2r^3 + 3r^2 h \Rightarrow h = \frac{40 - 2r^3}{3r^2} = \frac{40}{3r^2} - \frac{2}{3}r \quad (*)$$

$$S_{\text{مخزن}} = S_{\text{نیم کره}} + S_{\text{استوانه}} = 2\pi r^2 + (\underbrace{\pi r^2}_{\text{کف}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{جانبی}}) = 3\pi r^2 + 2\pi r h$$

مساحت مخزن را می یابیم:

$$S = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{40}{3r^2} - \frac{2}{3}r \right) = 3\pi r^2 + \frac{80\pi}{3r} - \frac{4\pi}{3}r = \frac{5\pi}{3}r^2 + \frac{80\pi}{3r}$$

در رابطه فوق به جای h معادل آن را از رابطه $(*)$ قرار می دهیم:

حالا $S' = 0$:

$$S' = \frac{10\pi}{3}r - \frac{80\pi}{3r^2} = 0 \Rightarrow \frac{10\pi}{3}r = \frac{80\pi}{3r^2} \Rightarrow r = \frac{8}{r^2} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰

چون این تابع فقط در $x = \pm 1$ نقطه بحرانی دارد، پس در $x = 2$ مشتق پذیر است

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 - a & x < 2 \\ b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow 24 - a = b \quad (I)$$

$$x = 2 \text{ پیوسته} \Rightarrow 16 - 2a = 2b + 4c \quad (II)$$

در این تابع نقاط بحرانی ریشه‌های مشتق‌اند:

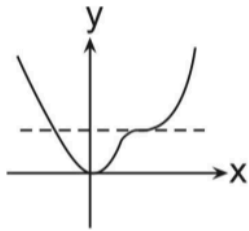
$$6x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{6}} = \pm 1 \Rightarrow \frac{a}{6} = 1 \Rightarrow a = 6$$

$$\xrightarrow{(I)} 24 - 6 = b \Rightarrow b = 18$$

$$\xrightarrow{(II)} 16 - 12 = 36 + 4c \Rightarrow 4c = -32 \Rightarrow c = -8$$

$$a + b + 2c = 6 + 18 - 16 = 8$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

تابع f فقط یک اکسترمم نسبی دارد؛ ولی دو مماس افقی یعنی $f' = 0$ دارد. پس یکی از ریشه‌های مشتق مضاعف است.

۱۲۱

$$f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 + 36x = x(4x^2 - 3ax + 36) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 9a^2 - 16 \times 36 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{16 \times 36}{9} = 64 \Rightarrow a = \pm 8 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ریشه مضاعف بزرگتر از صفر و مثبت است، پس فقط $a = 8$ قابل قبول است.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f'(x) = 2(-1)(1-x)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(1-x)^2$$

$$= 2(1-x)\left(-\sqrt[3]{x^2} + \frac{1-x}{3\sqrt[3]{x}}\right) = 2(1-x)\left(\frac{-3x+1-x}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$= \frac{2(1-x)(-4x+1)}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

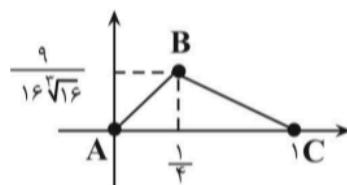
ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

۱۲۲

x	0	$\frac{1}{4}$	1	
f'	-	+	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	min	max	min	

با تعیین علامت کردن f' داریم:

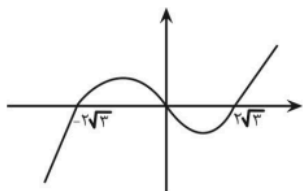
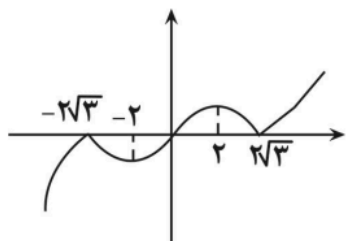
$$A \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right. \text{ و } B \left| \begin{smallmatrix} \frac{1}{4} \\ 9 \end{smallmatrix} \right. \text{ و } C \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$$

پس رئوس مثلث ΔABC برابرند با

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{16\sqrt[3]{16}} \times 1 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{9}{32\sqrt[3]{16}}$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۳

در ابتدا $y = x(x^2 - 12)$ را رسم می‌کنیم:(تابعی درجه ۳ با ریشه‌های ۰ و $\pm 2\sqrt{3}$)و در گام دوم برای رسم $y = x|x^2 - 12|$ دقت می‌کنیم که در بازه $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ مقدار $x^2 - 12$ منفی است؛ پس در کل عبارت یک منفی ضرب می‌شود و یا نسبت به محور x ها قرینه می‌شود و نمودار آن به صورت زیر می‌شود:

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

از طرفی اگر از آن مشتق بگیریم، داریم:

پس با توجه به شکل، مختصات نقطه ماکزیمم نسبی مشتق‌پذیر $A(2, 16)$ و نقطه مینیمم نسبی مشتق ناپذیر $B(2\sqrt{3}, 0)$ است و شیب خط آنها برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{16 - 0}{2 - 2\sqrt{3}} = \frac{16}{2 - 2\sqrt{3}} = \frac{8}{1 - \sqrt{3}} = \frac{8(1 + \sqrt{3})}{-2} = -4(1 + \sqrt{3})$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۴

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم تا آن را بررسی کنیم.

$$f(x) = \frac{(-2x + 2a)(x - b) - (-x^2 + 2ax + 6)}{(x - b)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2 + 2ax + 2bx - 2ab + x^2 - 2ax - 6}{(x - b)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 2bx - 2ab - 6}{(x - b)^2} = 0$$

برای آن که نقطه $x = 2$ بحرانی باشد ولی اکسترمم نسبی نباشد، باید صورت آن به فرم $(x - 2)^2$ باشد.

$$-x^2 + 2bx - 2ab - 6 = -x^2 + 4x - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \\ -2ab - 6 = -4 \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

اما چون $x = b = 2$ ریشه مخرج است، پس نقطه بحرانی نیست. پس چنین حالتی وجود ندارد و مقداری برای α یافت نمی‌شود.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۵

ابتدا مشتق تابع f (تغییرات شیب) را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

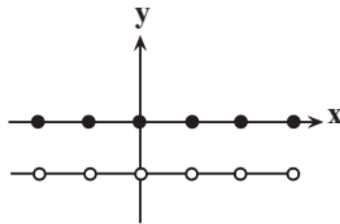
$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right)x^3 - 2(x) + 0 = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1)$$

$\frac{P(x)}{x}$	-1	0	1
$2x$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

در بازه‌ای که شیب، صفر یا منفی باشد، تابع نزولی است؛ در نتیجه در بازه $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$ تابع نزولی است که اگر با داده سؤال یعنی $(-\infty, a] \cup [b, -a]$

تطابق دهیم متوجه می‌شویم $a = -1$ و $b = 0$ است؛ در نتیجه داریم: $a - b = -1 - 0 = -1$

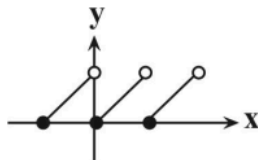
(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



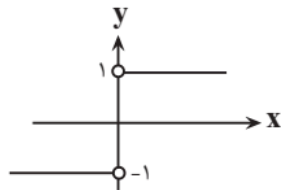
هر کدام از توابع را می‌توان به سادگی رسم کرده و نقاط بحرانی آنها را مشخص کرد: تابع f در همه نقاط دامنه خود بحرانی است ✓

۱۲۶

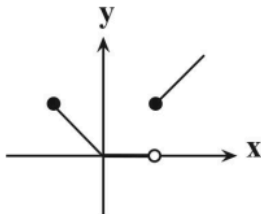
تابع $g(x) = x - [x]$ فقط در اعداد صحیح بحرانی است. $D_g = \mathbb{R} \times$



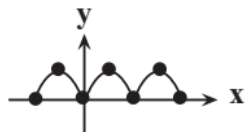
تابع h در همه نقاط دامنه خود $(\mathbb{R} - \{0\})$ بحرانی است. ✓



تابع $k(x) = x[x]$ با $D_k = \mathbb{R}$ فقط در بازه $[0, 1]$ و اعداد صحیح بحرانی است. $\times$



تابع $p(x) = |\sin x|$ در $x = \frac{k\pi}{2}$ بحرانی است و $D_p = \mathbb{R} \times$



(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۷

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a-2)x^2 + 9x + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 + 2(a-2)x + 9$$

$f'(x)$ باید عبارتی همواره نامنفی باشد ($\Delta \leq 0$)

$$\Delta = (2(a-2))^2 - 4 \times 9 \leq 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 9 \leq 0$$

$$\Rightarrow -3 \leq a-2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq a \leq 5$$

تنها عدد صحیح منفی، ۱- می باشد. بنابراین:

$$f'(x) = x^2 + 2(a-2)x + 9 \xrightarrow{a=-1} f'(x) = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow f'(1) = 4$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$y' = 3ax^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(3ax + 2b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-2b}{3a} \end{cases}$$

در ابتدا نقاط اکسترمم را مشخص می‌کنیم:

۱۲۸

طبق شکل مشخص شده در نقطه $x = \frac{2b}{3a}$ مقدار طول اکسترمم برابر ۲ می‌باشد در نتیجه داریم:

$$-\frac{2b}{3a} = 2 \Rightarrow b = -3a \quad (I)$$

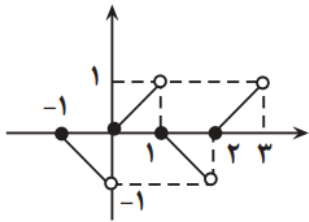
با توجه به نقطه $(2, 0)$ داده شده در شکل می‌توان معادله دیگر را نیز مشخص کرد:

$$(2, 0) \Rightarrow 0 = a(2)^3 + b(2)^2 - 8 \Rightarrow 8a + 4b = 8 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (II) \xrightarrow{(II), (I)} 2a - 3a = 2 \Rightarrow a = -2$$

مقدار k نیز برابر است با:

$$y = -2x^3 + bx^2 - 8 \xrightarrow{x=0} y = -8 = k \Rightarrow a \times k = 16$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -(x - [x]) = [x] - x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x - [x]$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -(x - [x]) = [x] - x$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - [x]$$

طبق نمودار تابع $f(x)$ نه $\max$ مطلق دارد و نه $\min$ مطلق

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

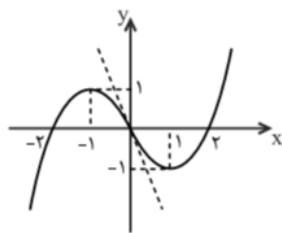
۱۲۹

نمودار تابع را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم

۱۳۰

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x = x(x-2) & , x \geq 0 \\ x(-x) - 2x = -x(x+2) & , x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(1, -1)$ ماکزیمم نسبی تابع و نقطه‌ی $(-1, 1)$ مینیمم نسبی تابع است که فاصله‌ی آنها برابر است:

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$2x = 6 + y \Rightarrow y = 2x - 6$$

فرض کنید دو عدد x و y باشند. پس طبق فرض:

$$P = x \cdot y = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x$$

می‌خواهیم حاصل ضرب دو عدد را مینیمم کنیم:

$$\Rightarrow P'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -3$$

$$x + y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

پس $x + y$ برابر است با:توجه کنید که $x = \frac{3}{2}$ طول نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع P است.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۲

فاصله‌ی نقطه‌ی فرضی $M(\alpha, \sqrt{2\alpha+9})$ روی منحنی از نقطه‌ی $A(4, 0)$ باید مینیمم شود، بنابراین:

$$AM = d = \sqrt{(\alpha-4)^2 + (\sqrt{2\alpha+9}-0)^2}$$

$$\Rightarrow d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + 2\alpha + 9} = \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}$$

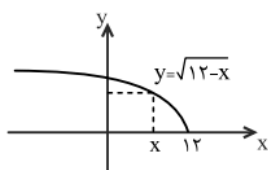
با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، خواهیم داشت:

$$d = \sqrt{(\alpha-3)^2 + 16}$$

مینیمم زمانی اتفاق می‌افتد که $(\alpha-3)^2 = 0$ و در نتیجه مینیمم عبارت برابر $d_{\min} = \sqrt{16} = 4$ خواهد بود.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳

با توجه به شکل، طول مستطیل x و عرض آن برابر با $y = \sqrt{12-x}$ است. مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = xy = x\sqrt{12-x}$$

$$S'(x) = 1 \times \sqrt{12-x} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{12-x}} = \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}}$$

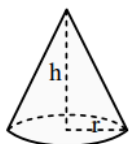
$$= \frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(8) = 8\sqrt{12-8} = 16$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴



$$h + r = 1$$

می‌خواهیم حجم مخروط ($V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$) ماکزیمم گردد. از رابطه‌ی کمکی $h, h + r = 1$ را برحسب r می‌یابیم:

$$h = 1 - r \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 (1 - r) = \frac{1}{3}\pi (r^2 - r^3)$$

$V'(r)$ را محاسبه کرده و نقطه‌ی بحرانی را می‌یابیم:

$$V'(r) = \frac{1}{3}\pi (2r - 3r^2) = 0 \Rightarrow r = 0, r = \frac{2}{3}$$

به ازای $r = 0$ مخروطی نداریم. پس باید $r = \frac{2}{3}$ باشد و بزرگ‌ترین حجم مخروط به ازای $r = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید.

$$V_{\max} = V\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{\max} = \frac{4}{27}\pi - \frac{8}{81}\pi = \frac{4\pi}{81}$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ارتفاع استوانه را h و شعاع قاعده‌ی آن را r در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

۱۳۵

$$V = \pi r^2 h = 54\pi \Rightarrow r^2 h = 54 \Rightarrow h = \frac{54}{r^2} \quad (*)$$

کل مساحت استوانه $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$$\xrightarrow{(*)} S(r) = 2\pi r \left(\frac{54}{r^2}\right) + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2\right)$$

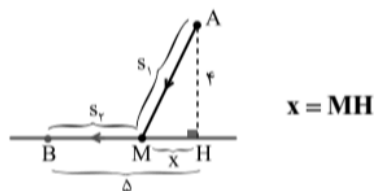
$$S'(r) = 2\pi \left(-\frac{54}{r^2} + 2r\right) = 0 \Rightarrow \frac{54}{r^2} = 2r \Rightarrow 2r^3 = 54$$

$$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

بنابراین به ازای $r = 3$ مساحت کل مینیمم می‌شود.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی پیاده شدن او از نقطه‌ی H را x فرض کنیم، مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

مسافت طی شده توسط شخص عبارت است از:

و از طرفی اگر مسیر حرکت را به دو قسمت s_1 در دریا و s_2 در خشکی تقسیم نماییم، آنگاه مدت زمان جابه‌جایی شخص برابر است با:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$$

و طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} v_1 = 3 \text{ km/h} \\ v_2 = 5 \text{ km/h} \end{cases}$$

و از طرفی با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MHA داریم:

$$x^2 + 16 = s_1^2 \Rightarrow s_1 = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{3} + \frac{5 - x}{5}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 16}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 16}$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 16) \Rightarrow 16x^2 = 9 \times 16$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = 3 \text{ km}$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

برای این که تابع f همواره نزولی باشد، باید در تابع f' ، ضریب x^2 منفی و $\Delta \leq 0$ باشند:

$$f(x) = ax^3 - x^2 + 3ax + a - 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 2x + 3a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a < 0 \Rightarrow a < 0 \\ \Delta_{f'} \leq 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(3a)(3a) \leq 0 \Rightarrow 1 - 9a^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 \leq 9a^2 \Rightarrow 1 \leq |3a| \Rightarrow \frac{1}{3} \leq |a| \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{3} \\ \text{یا} \\ a \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

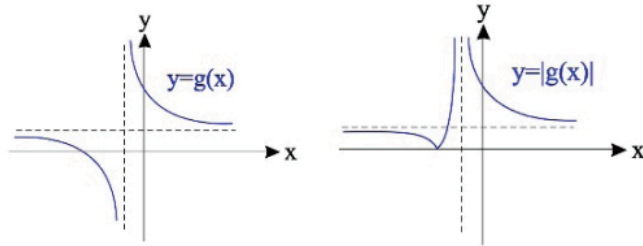
از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم $a \leq -\frac{1}{3}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۸

ابتدا ضابطه تابع g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = x+2 \rightarrow g(x) = \frac{x+3}{x+1} \\ f(g(x)) = x+2 \end{cases}$$

حال نمودار تابع $y = |g(x)|$ را رسم می‌کنیم، با توجه به نمودارتابع $y = |g(x)|$ داریم:الف) نادرست، تنها نقطه بحرانی تابع، نقطه A است.ب) درست، نقطه A مینیمم مطلق و نسبی تابع است.پ) نادرست، تابع در بازه $(-\infty, -3)$ اکیداً نزولی است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۹

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

حال برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 0 + \frac{\overbrace{2(1-x^2)}^{2(1-x^2)}}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2) \\ f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow B(-1, 0) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1$$

$$B, A \text{ نقاط } y - 0 = 1 \times (x + 1) \xrightarrow{x=0} y = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۰



مختصات نقطه min نسبی در تابع f صدق می‌کند و همچنین طول نقطه min نسبی ریشه تابع f' است.

چون نقطه $A(1,1)$ مینیمم نسبی تابع f می‌باشد، پس $f(1)=1$ و $f'(1)=0$ می‌باشد و داریم:

$$f(1)=1 \Rightarrow \frac{2-m}{3-n}=1 \Rightarrow n-m=1 \Rightarrow n=m+1$$

$$f'(x)=\frac{(2)(3x^2-nx)-(6x-n)(2x-m)}{(3x^2-nx)^2}$$

$$=\frac{-6x^2+6mx-mn}{(3x^2-nx)^2}$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow \frac{-6+6m-mn}{(3-n)^2}=0 \Rightarrow -6+6m-mn=0$$

$$\xrightarrow{n=m+1} -6+6m-m(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2-5m+6=0}_{(m-2)(m-3)} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \Rightarrow n=3 \\ m=3 \Rightarrow n=4 \end{cases}$$

اگر $m=2$ و $n=3$ باشد، تابع به شکل $f(x)=\frac{2x-2}{3x^2-3x}$ خواهد بود و $f(1)$ تعریف نشده می‌شود. پس نقطه $A(1,1)$ در آن صدق نخواهد کرد و فقط $m=3$ قابل قبول است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f'(x)=3x^2-2m, f''(x)=6x$$

ابتدا مشتق‌های اول و دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

حالا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=x^2(6x)+3x^2-2m=6x^3+3x^2-2m$$

$$\Rightarrow g'(x)=18x^2+6x$$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow 18x^2+6x=0 \Rightarrow 6x(3x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-\frac{1}{3}$$

با توجه به جدول تعیین علامت g' متوجه می‌شویم که $x=-\frac{1}{3}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است و چون مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۱ است، پس:

$$g\left(-\frac{1}{3}\right)=1 \Rightarrow 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2m=1 \Rightarrow m=-\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{m}\right]=\left[\frac{2}{-\frac{4}{9}}\right]=-5$$

X	$-\frac{1}{3}$	0
g'	+ 0 - 0 +	
g		

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۲

ابتدا نقاط بحرانی ضابطه $y = x^4 - 4x$ را تعیین می‌کنیم: $x \geq 0$

$$y' = 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow 4(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

در ضمن تابع f در نقطهٔ مرزی $x = 0$ ناپیوسته است، چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ است. حالا برای این که تابع f دارای ۴

نقطهٔ بحرانی باشد، باید ضابطهٔ پایینی دارای دو نقطهٔ بحرانی باشد، یعنی مشتق آن دارای ۲ ریشهٔ متمایز باشد، در ضمن چون در محدودهٔ $x < 0$ هستیم، این دو ریشه باید دارای علامت منفی باشند.

$$x < 0: y = x^3 + mx^2 + mx + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2mx + m$$

حالا باید در تابع y' سه شرط $\Delta > 0$ و $P > 0$ و $S < 0$ برقرار باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(3)(m) > 0 \Rightarrow 4m(m-3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases}$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{m}{3} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{2m}{3} < 0 \Rightarrow m > 0$$

از اشتراک مقادیر m نتیجه می‌گیریم $m > 3$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۳

ابتدا دامنهٔ $g(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$D_g = \mathbb{R} - \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$g'(x) = \frac{-2f'(x)}{f^2(x)}$$

با توجه به اینکه نقطه‌ای بحرانی است که در دامنهٔ تابع، مشتق تابع صفر یا تعریف نشده باشد، پس:

$$g'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \notin D_g$$

$$g'(x) = \text{تعریف نشده} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \rightarrow x = 0, 2 \notin D_g \\ f'(x) = \text{تعریف نشده} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

تنها نقطهٔ بحرانی $x = 1$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۴

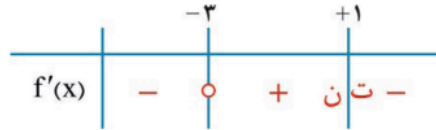
می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x-1)^2}$ می‌باشد بنابراین $f'(x)$ آن برابر است با:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1)^2 - (x^2 + 3)(2)(x-1)}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow \frac{-2(x+3)}{(x-1)^3} = 0$$

$\rightarrow x = -3$ (نقطه بحرانی)

حال در تعیین علامت $f'(x)$ داریم:

$$\Rightarrow f(-3) = \frac{3}{4} \rightarrow R_{f(x)} = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$$



حال می‌دانیم دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x-1)^2}$ و $f'(x) = \frac{-2(x+3)}{(x-1)^3}$ برابر با $R - \{1\}$ می‌باشد.

در نتیجه موارد «الف» و «پ» درست می‌باشند.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$y = f(x) \xrightarrow{A(3, -2)} f(3) = -2$$

مشتق در نقاط اکسترمم نسبی در صورت وجود برابر صفر است. ($f'(3) = 0$)

$$h(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + 3} \rightarrow h'(x) = \frac{2f(x)f'(x)(x^2 + 3) - 2xf^2(x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3} h'(3) = \frac{2f(3)f'(3)(12) - 6f^2(3)}{(12)^2}$$

$$h'(3) = \frac{0 - 6(-2)^2}{144} = -\frac{1}{6}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۵

۱۴۶

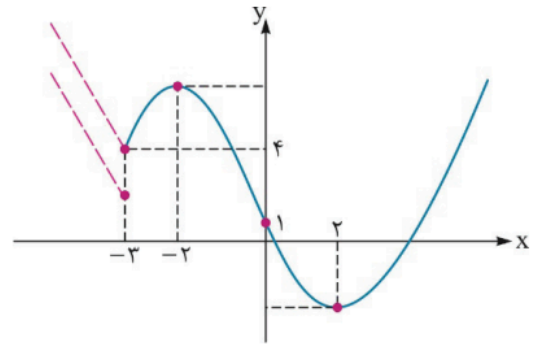
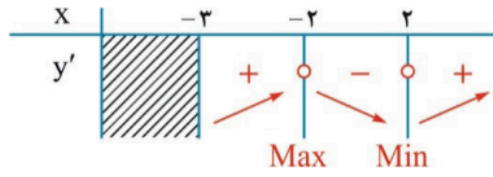
ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را به ازای $x > -3$ رسم می‌کنیم:

$$x > -3 \rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$y' = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\max\left(-2, \frac{19}{3}\right)$$

$$\min\left(2, -\frac{13}{3}\right)$$



برای اینکه $f(x)$ دارای ۲ مینیمم نسبی باشد باید به ازای $x \leq -3$ ، خط دارای شیب منفی و همچنین $f(-3) \leq 4$ باشد:

$$x \leq -3 \rightarrow y = \frac{a}{3}x + a^2 + 2 \rightarrow f(-3) = a^2 - a + 2$$

$$\begin{cases} f(-3) \leq 4 \rightarrow a^2 - a + 2 \leq 4 \rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \rightarrow -1 \leq a \leq 2 & (1) \\ \frac{a}{3} < 0 \rightarrow a < 0 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 \leq a < 0$$

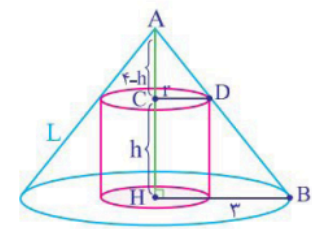
پس a شامل یک عدد صحیح است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۷

با توجه به قضیه تالس در مثلث قائم الزاویه AHB داریم:

$$\frac{AC}{AH} = \frac{CD}{HB} \Rightarrow \frac{4-h}{4} = \frac{r}{3} \Rightarrow 12-3h = 4r \Rightarrow r = 3 - \frac{3h}{4} \quad (1)$$



$$S(h) = 2\pi \left(3 - \frac{3h}{4}\right) \times h = 2\pi \left(3h - \frac{3h^2}{4}\right)$$

مساحت جانبی استوانه از رابطه $S = 2\pi rh$ به دست می‌آید:

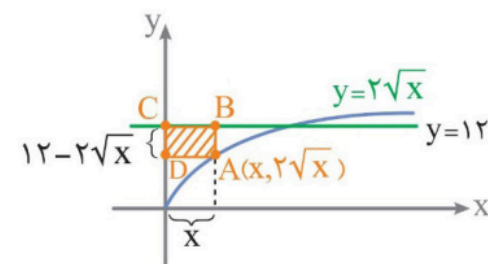
از رابطه (۱) داریم:

$$\Rightarrow S'(h) = 0 \Rightarrow 2\pi \left(3 - \frac{3}{2}h\right) = 0 \Rightarrow h = 2 \rightarrow S(2) = 2\pi \left(6 - \frac{3(4)}{4}\right) = 6\pi$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۸

با توجه به این که نقطه A روی منحنی تابع $y = 2\sqrt{x}$ قرار دارد پس مختصات آن به صورت $(x, 2\sqrt{x})$ خواهد بود. همچنین طول مستطیل برابر x و عرض آن برابر $12 - 2\sqrt{x}$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



$$\Rightarrow S(x) = x(12 - 2\sqrt{x}) = 12x - 2x^{\frac{3}{2}}$$

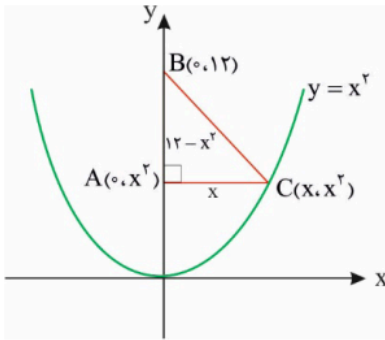
حال از تابع مشتق می‌گیریم و ماکزیمم آن را به دست می‌آوریم:

$$S'(x) = 12 - 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 16$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 16(12 - 2\sqrt{16}) = 16 \times 4 = 64$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۹



مساحت مثلث را به صورت تابعی از یکی از اضلاع آن نوشته و مشتق می گیریم. با مساوی صفر قرار دادن مشتق و حل معادله مقدار اضلاعی که به ازای آنها بیشترین مساحت حاصل می شود را به دست می آوریم.

با توجه به اینکه رأس C روی سهمی قرار دارد و مختصات نقطه $B(0, 12)$ است، ارتفاع و قاعده مثلث به دست می آید پس داریم:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (12 - x^2) x \Rightarrow$$

$$S(x) = -\frac{1}{2} x^3 + 6x \Rightarrow S'(x) = -\frac{3}{2} x^2 + 6 \rightarrow S'(x) = 0 \rightarrow -\frac{3}{2} x^2 + 6 \rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 \Rightarrow \boxed{S = 8}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۰

اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینه t ساعت حرکت آن از رابطه $C = 80000t + 320v^2 t$ به دست می آید. از طرفی می دانیم $t = \frac{x}{v}$ است، پس هزینه x کیلومتر حرکت قطار برابر است با:

$$C = 80000 \left(\frac{x}{v} \right) + (320v^2) \left(\frac{x}{v} \right)$$

با جایگذاری $x = 1$ هزینه ۱ کیلومتر حرکت به دست می آید. پس برای به دست آوردن کمترین مقدار تابع، مشتق آن را برابر صفر می گذاریم:

$$C(v) = \frac{80000}{v} + 320v \xrightarrow{C'(v)} C'(v) = \frac{-80000}{v^2} + 320 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{80000}{v^2} = 320 \Rightarrow v^2 = \frac{80000}{320} = 250 \Rightarrow v = 50$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۱

چون هر پتو به قیمت $23 - \frac{1}{4}x$ تومان فروخته می شود، پس تعداد x پتو به قیمت $x(23 - \frac{1}{4}x)$ تومان فروخته می شود. حالا اگر هزینه تولید x عدد پتو را از قیمت فروش آن کم کنیم، مقدار سود به دست می آید:

$$p(x) = (23x - \frac{1}{4}x^2) - (\frac{1}{4}x^2 + 8x + 20) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 20$$

برابر صفر می گذاریم:

$$P'(x) = -\frac{3}{2}x + 15 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 15 \Rightarrow x = 10$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۲

نقطه $B(x, \sqrt{2x+7})$ روی نمودار قرار دارد و فاصله آن از نقطه $A(5, 0)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

پس کوتاه‌ترین فاصله A و B به ازای $x = 4$ به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{4^2 - 8 \times 4 + 32} = \sqrt{16} = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

یک نقطه بحرانی $x-1=0 \rightarrow x=1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)+5 & x \geq 1 \\ x^2(1-x)+5 & x < 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3-x^2+5 & x \geq 1 \\ -x^3+x^2+5 & x < 1 \end{cases}$$

تابع f در نقطه مرزی $x=1$ پیوسته است. حال مشتق پذیری آن را در این نقطه بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-2x & x > 1 \\ -3x^2+2x & x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_{+}(1) = 1 \\ f'_{-}(1) = -1 \end{cases} \rightarrow x=1 \text{ نقطه بحرانی}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-2x=0 \rightarrow x(3x-2)=0 \\ -3x^2+2x=0 \rightarrow x(-3x+2)=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \times \\ x=\frac{2}{3} \text{ غ ق} \\ x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{در نهایت } 1 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{5}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۴

$$f'(x) = -6x^2 + 18x = 0$$

$$-6x(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \times$$

$$f(-1) = 2 + 9 - 13 = -2$$

$$f(0) = -13$$

$$f(2) = -16 + 36 - 13 = 7$$

$$\min_{\text{مطلق}} = -13$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2 = 0$$

$$3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \text{ غ ق}$$

$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17$$

$$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2$$

$$\max_{\text{مطلق}} = -2$$

$$\text{اختلاف} = -2 - (-13) = 11$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

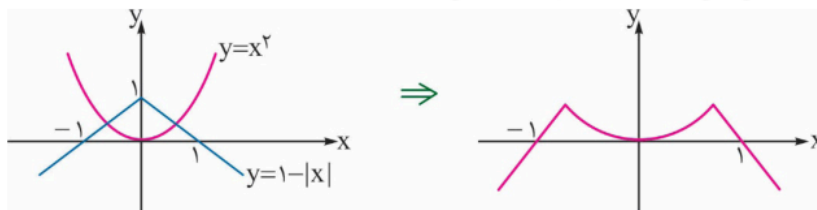
۱۵۵ ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{3 + 2^{2-x}}{1 + 2^{-x}} \rightarrow f(x) = \frac{3 + 4(2^{-x})}{1 + 2^{-x}} = \frac{-1 + 4(1 + 2^{-x})}{1 + 2^{-x}} = \frac{-1}{1 + 2^{-x}} + 4$$

تابع $y = 2^x$ اکیداً صعودی است، پس قرینه آن نسبت به محور y یعنی $y = 2^{-x}$ اکیداً نزولی است. بنابراین $y = 1 + 2^{-x}$ نیز اکیداً نزولی است. حال چون $y = 1 + 2^{-x}$ همواره مثبت است، پس $y = \frac{1}{1 + 2^{-x}}$ اکیداً صعودی و در نتیجه $y = \frac{-1}{1 + 2^{-x}}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع $f(x) = \frac{-1}{1 + 2^{-x}} + 4$ اکیداً نزولی است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۶ با استفاده از رسم نمودار f به راحتی می‌توان اکسترم‌های نسبی آن را تعیین نمود.



با توجه به نمودار واضح است که f دو $\max$ و یک $\min$ نسبی دارد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$D_f = x^2 \geq \frac{1}{4} \rightarrow |x| \geq \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \lambda x \sqrt{4x^2 - 1} + \frac{\lambda x(4x^2 - k)}{2\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{\lambda x(4x^2 - 1) + 4x(4x^2 - k)}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{4\lambda x^3 - (\lambda + 4k)x}{\sqrt{4x^2 - 1}} = 0 \quad x(4\lambda x^2 - (\lambda + 4k)) = 0$$

با توجه به دامنه تابع $x = 0$ نمی‌تواند اکسترم باشد پس معادله زیر باید ۲ جواب در دامنه‌ی تابع داشته باشد.

$$x^2 = \frac{\lambda + 4k}{4\lambda} = \frac{2 + k}{12} \quad \frac{2 + k}{12} > \frac{1}{4} \rightarrow k > 1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۸

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{x-1} & x > 1 \\ \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

در ضابطه دوم $y_1 = \sqrt[3]{x-1}$ و $y = \frac{x}{1-x}$ هر دو در بازه $x < 1$ صعودی هستند پس در ضابطه اول به دنبال بازه‌ای هستیم که تابع در آن نزولی است.

$$y_1 = \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{x-1} \rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \frac{1}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \leq \frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow (x-1)^2 \leq 3\sqrt[3]{(x-1)^2} \xrightarrow{\text{توان ۳}} (x-1)^6 \leq 27(x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2((x-1)^4 - 27) \leq 0$$

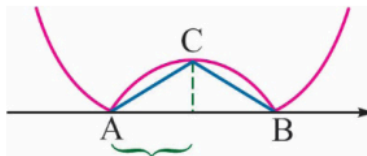
$\sqrt[4]{27} - 1$	1	$\sqrt[4]{27} + 1$
+	-	-
+	-	+

 $\xrightarrow{x > 1} x \in (1, \sqrt[4]{27} + 1]$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۹

مشخصات سه نقطه اکسترمم نسبی به صورت زیر است:



$$A\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad C\left(\frac{-b}{2a}, \left|\frac{-\Delta}{4a}\right|\right) \quad B\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$$

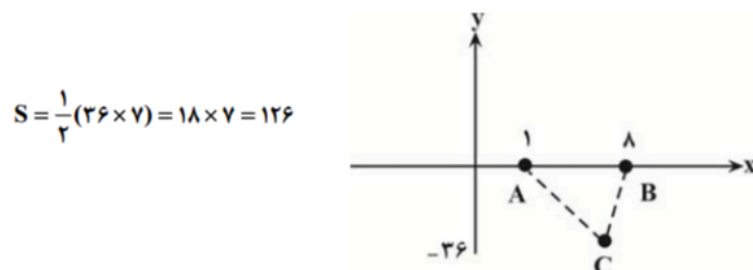
با توجه به شکل $AC = BC$ است و این دو ضلع باید بر هم عمود باشند، پس: باید $(m_{AC})(m_{CB}) = -1$

$$\left(m_{AC} = \frac{\left|\frac{-\Delta}{4a}\right|}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right) \left(m_{BC} = \frac{\left|\frac{-\Delta}{4a}\right|}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right) = -1 \quad \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta}}\right) = -1 \rightarrow \frac{\Delta^2}{4\Delta} = 1 \rightarrow \frac{\Delta}{4} = 1 \rightarrow \Delta = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۰

$$f'(x) = 2(x-1)\sqrt[3]{x-a} + \frac{1(x-1)^2}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}} = \frac{6(x-1)(x-a) + (x-1)^2}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}} = \frac{(x-1)(6x-6a+x-1)}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-a=0 \Rightarrow x=a \\ 6x-6a+x-1=0 \Rightarrow x = \frac{6a+1}{7} = 7 \\ \Rightarrow 6a+1=49 \Rightarrow 6a=48 \Rightarrow a=8 \end{cases}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پس نقاط بحرانی عبارتند از: $C = \begin{bmatrix} 7 \\ -36 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱۶۱

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + \frac{b}{1} = 2 \quad f'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{(1+1)^2} = 0 \Rightarrow b = 4a \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{\frac{4}{3}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} - \frac{\frac{4}{3}}{(x+1)^2}$$

پس داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x = -3 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y = \frac{2}{3}(-3) + \frac{\frac{4}{3}}{-2} = -\frac{6}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۲

دامنه تابع $[0, 2]$ است. روی این بازه از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = 1 - \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = 1-x$$

طرفین را به توان دو می‌رسانیم.

$$2x-x^2 = 1+x^2-2x \Rightarrow 2x^2-4x+1=0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

با توجه به اینکه $1-x$ باید مثبت باشد پس $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ غیرقابل قبول است. برای یافتن مینیمم مطلق f ، عرض‌های تابع را در $x=0$ ، $x=2$ و $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ محاسبه می‌کنیم.

$$f(0) = 0 \quad f(2) = 2$$

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \xrightarrow{\sqrt{2x-x^2}=1-x} x - \sqrt{2x-x^2} = x - (1-x) = 2x-1 = 2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = 1-\sqrt{2}$$

فاصله نقطه $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$ را از خط $x-y=0$ می‌یابیم.

$$AH = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2} - (1-\sqrt{2})\right|}{\sqrt{2}} = \left|\frac{2-\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۳

با توجه به اینکه مشتق تابع f همیشه منفی است، $f'(x) = -3x^2 - 4 < 0$ این تابع اکیداً نزولی است. بنابراین برای یافتن $\max$ و $\min$ مطلق باید به ترتیب کمترین و بیشترین ورودی را برای تابع f پیدا کرد. چون ورودی تابع f خروجی تابع g است، کمترین و بیشترین خروجی g را می‌یابیم.

$$g'(x) = -6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\underline{x \in [-1, 2]} \quad g(0) = -3, \quad g(2) = 5, \quad g(-1) = 5 \quad (\text{نقاط بحرانی})$$

ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع g در بازه $[-1, 2]$ به ترتیب ۵ و -۳ است.

$$\text{fog ماکزیمم مطلق } f(-3) = -(-3)^3 - 4(-3) - 10 = 29$$

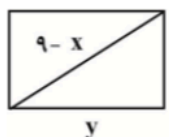
$$\text{fog مینیمم مطلق } f(5) = -5^3 - 4 \times 5 - 10 = -155 \Rightarrow \text{Min} + \text{Max} = -155 + 29 = -126$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴

یکی از اضلاع مستطیل را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین قطر مستطیل (وتر مثلث قائم‌الزاویه) برابر $9-x$ است.

با توجه به رابطه فیثاغورس بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$y = \sqrt{(9-x)^2 - x^2} = \sqrt{81 - 18x} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = xy = x\sqrt{81 - 18x} \xrightarrow{x>0} S = \sqrt{81x^2 - 18x^3}$$

از رابطه مساحت مستطیل مشتق می‌گیریم (می‌توانیم فقط از عبارت زیر رادیکال مشتق بگیریم)

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 162x - 54x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \quad \text{غ ق ق} \Rightarrow y = \sqrt{81 - 18 \times 3} = \sqrt{27}$$

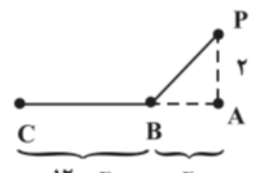
بیشترین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 3\sqrt{27} = 9\sqrt{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵

می‌دانیم که $\frac{\text{جابجایی}}{\text{سرعت}} = \text{زمان}$ ، اگر $AB = x$ بگیریم، داریم:



$$t = \text{زمان کل} = \underbrace{\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}}_{\text{بخش دوم جابجایی}} + \underbrace{\frac{12-x}{12}}_{\text{بخش اول جابجایی}}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین زمان، مشتق عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$t' = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + 4} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حداقل زمان برابر است با:

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + 4}}{4} + \frac{12 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{12} = \frac{3}{4\sqrt{2}} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{24} = 1 + \frac{18-2}{24\sqrt{2}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{2}} = 1 + \frac{10}{21} = 1/48$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶

ریشه‌های مشتق و نقاط مشتق‌ناپذیر، به شرط آنکه در دامنه تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 7) \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(2x - 7) + (x^2 - 7)\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{2x^2 + x^2 - 7}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3x^2 - 7}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 7 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

ریشه‌های مشتق در دامنه تابع هستند، بنابراین نقاط بحرانی می‌باشند. از طرفی در $x = 0$ مشتق وجود ندارد، بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع f به صورت $\{-1, 0, 1\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f'(x) < 0 \rightarrow \frac{k(k+5) - 6}{(-x+k+5)^2} = \frac{k^2 + 5k - 6}{(-x+k+5)^2} < 0$$

از آنجایی که مخرج کسر همواره مثبت می‌باشد، بنابراین کفایت صورت کسر کوچکتر از صفر گردد.

$$k^2 + 5k - 6 < 0 \rightarrow -6 < k < 1$$

$$-x + k + 5 = 0 \rightarrow x = k + 5 \rightarrow \begin{cases} k + 5 \leq -1 \\ k + 5 \geq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \leq -6 \\ k \geq -1 \end{cases}$$

$$-1 \leq k < 1$$

ضمناً مخرج کسر نباید صفر شود، بنابراین ریشه مخرج نباید در بازه $(-1, 4)$ بیفتد:

در نهایت مقادیر قابل قبول k عبارتند از:

این بازه، دو عدد صحیح -1 و صفر را دارد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(2) = -\frac{25}{3} \Rightarrow 27a - 9 - 9 + b = -\frac{25}{3} \Rightarrow 27a + b = \frac{29}{3} (*) \quad f'(2) = 0 \Rightarrow 2ax^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow 27a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \xrightarrow{*} 9 + b = \frac{29}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1, \frac{2}{3})$$

B نقطه ماکزیمم نسبی

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۸

۱۶۹

$$f(x) = 3ax^2 - 2bx - 2 \Rightarrow \begin{cases} f'(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 8 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a - 4b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a - 4b = 2 \\ 3a + 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1$$

حال مقدار تابع را در نقاط $x = 0, 2, 3$ پیدا می‌کنیم:

$$f(2) = -\frac{11}{3}, \quad f(0) = 1, \quad f(3) = -\frac{1}{3}$$

بنابراین مینیمم مطلق در بازه $[0, 3]$ برابر $-\frac{11}{3}$ می‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۰

هر نقطه روی منحنی $y = \sqrt{x+2}$ به صورت $A(x, \sqrt{x+2})$ می‌باشد پس فاصله A تا مبدأ $|OA| = \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد.

$$|OA| = \sqrt{x^2 + x + 2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad |OA| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۱

گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = (x+a)\sqrt{4-x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{4-x} + \frac{(-1)}{2\sqrt{4-x}}(x+a) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{x+a}{2\sqrt{4-x}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} f'(x) = \frac{2(4-x) - x - a}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3x + 8 - a}{2\sqrt{4-x}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3x + 8 - a = 0 \Rightarrow x = \frac{8-a}{3}$$

گام دوم: دامنه تابع، $x \leq 4$ است. با توجه به ریشه به دست آمده، جدول تغییرات رفتار نمودار را رسم می‌کنیم. به گفته سؤال، تابع

در بازه $[-3a, b]$ اکیداً نزولی است، پس b همان ۴ و $-3a$ همان $\frac{8-a}{3}$ است:

	$-\infty$	$\frac{8-a}{3}$	۴
f'	+	۰	-
f	$\nearrow$		$\searrow$

$$\frac{8-a}{3} = -3a \Rightarrow 8-a = -9a \Rightarrow 8a = -8 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a+b = 3$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۲

گام اول: ابتدا مشتق تابع f را محاسبه کرده و به کمک آزمون مشتق اول ماکزیمم نسبی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+x+2) - (2x+1)(x^2+3x)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-2x^2+4x+6}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-2(x-3)(x+1)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

x	-1	3
f'	-	+
f	↘	↗

گام دوم: با توجه به جدول تعیین علامت طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی برابر ۳ است و عرض این نقطه برابر $f(3) = \frac{9}{4}$ است.
در نتیجه، فاصلهٔ نقطهٔ $(3, \frac{9}{4})$ از محور x ها برابر $\frac{9}{4}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۳

گام اول: نقطهٔ ماکزیمم نسبی در x های منفی رخ داده است. در $x < 0$ ، ضابطه تابع به صورت $y = ax^2 + bx$ است.

گام دوم: طول و عرض رأس این سهمی به ترتیب برابر ۲- و ۴ است:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \\ 4a - 2b = 4 \Rightarrow b = 2a - 2 \end{cases} \Rightarrow 4a = 2a - 2 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{b=4a} b = -4$$

$$\Rightarrow a + b = -5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۴

گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم تا $f'(x)$ به دست آید:

$$f(x) = ax + \sqrt{5 - x^2} \Rightarrow f'(x) = a + \left(\frac{-x}{\sqrt{5 - x^2}} \right) \Rightarrow f'(x) = a - \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}$$

گام دوم: $f'(x)$ در $x = 2$ موجود است، از آنجا که $x = 2$ طول نقطه بحرانی است، پس: $f'(2) = 0$:

$$f'(x) = a - \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow f'(2) = a - \frac{2}{\sqrt{5 - 2^2}} \xrightarrow{f'(2)=0} 0 = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

پس $f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2}$ گام سوم: برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی دیگر تابع f ، ابتدا دامنه آن را به دست می‌آوریم:

$$5 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

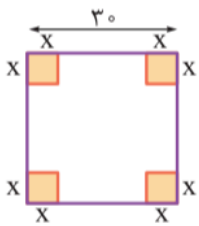
پس نقاط بحرانی تابع $x = 2$ ، $x = \sqrt{5}$ و $x = -\sqrt{5}$ هستند.گام چهارم: حال مقادیر تابع f را به ازای طول نقاط بحرانی به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{max مطلق } f(2) = 2(2) + \sqrt{5 - 4} = 5 \\ f(\sqrt{5}) = 2(\sqrt{5}) + \sqrt{5 - 5} = 2\sqrt{5} \\ \text{min مطلق } f(-\sqrt{5}) = 2(-\sqrt{5}) + \sqrt{5 - 5} = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

پس مقدار min مطلق $-2\sqrt{5}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۵

گام اول: با توجه به این که مساحت ورق برابر 90° است، پس طول هر ضلع آن برابر 30 است. حال شکل زیر را در نظر بگیرید:

گام دوم: حال با توجه به شکل، تابع حجم مکعب مستطیل را می‌نویسیم و بیشترین مقدار آن را محاسبه می‌کنیم:

$$V(x) = (30 - 2x)^2 x$$

$$\Rightarrow V'(x) = -4(30 - 2x)x + (30 - 2x)^2 = (30 - 2x)(30 - 6x)$$

$$\Rightarrow V'(x) = 0 \Rightarrow (30 - 2x)(30 - 6x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \text{ غق} \\ x = 5 \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(5) = 2000$$

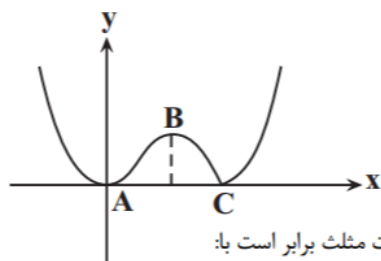
توجه: به ازای $x = 15$ تمامی ورق حذف خواهد شد 😊.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۶

تابع در $x = k$ یک نقطه بحرانی دارد. از f مشتق می‌گیریم:

$$y = x^3(-x+k) = -x^4 + kx^3 \Rightarrow y' = 3x^2 - 4kx = x(3x - 4k) = 0$$



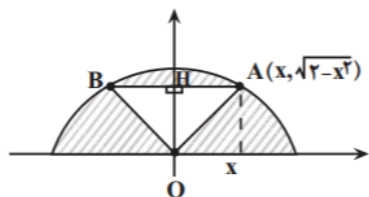
پس $x = 0$ و $x = \frac{4k}{3}$ نقاط بحرانی هستند؛ مختصات رئوس مثلث $A(0,0)$ و $C(k,0)$ و $B(\frac{4k}{3}, \frac{4k^3}{27})$ هستند و مساحت مثلث برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times y_B = \frac{1}{2} (k) \times \frac{4k^3}{27} = \frac{2k^4}{27} = \frac{8}{9} \Rightarrow k^4 = 12 \Rightarrow k = \sqrt[4]{12}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۷

وقتی مساحت قسمت هاشور خورده min است یعنی مساحت مثلث max است. پس باید با max کردن مساحت مثلث، مسئله را حل کنیم:



$$S_{OAB} = \text{مساحت مثلث} = x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \begin{cases} x_A = +1 \\ x_B = -1 \end{cases}$$

$$y_A = OH = 1$$

میانۀ وارد بر AB همان ارتفاع وارد بر AB یا به عبارتی OH می‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۸

فرض کنید $M(x, f(x))$ باشد:

$$S = \frac{1}{2} OH \cdot MH = \frac{1}{2} x f(x) = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{2x+1} = \frac{1}{2} \sqrt{2x^5 + x^4}$$

$$S' = \frac{1}{2} \times \frac{10x^4 + 4x^3}{2\sqrt{2x^5 + x^4}} \xrightarrow{S'=0} x = -\frac{2}{5}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۹

$$y' = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2-1) - 2x\sqrt[3]{x}}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-6x^2}{3\sqrt[3]{x^2}(x^2-1)^2} = \frac{-1-5x^2}{3\sqrt[3]{x^2}(x^2-1)^2}$$

x	-1	0	1	
y'	-	-	-	-
y				

چون $x = \pm 1$ ریشه‌های مخرج‌اند پس بین این دو عدد، تابع اکیداً نزولی است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

دقت کنید تابع در تابع $x=1$ بر محور x مماس است پس فرض می‌کنیم:

۱۸۰

$$f(x) = -(x-1)^2(x-\alpha)$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1)(x - \alpha)$$

$$f(x) = -(x^2 - (2+\alpha)x^2 + (1+2\alpha)x - \alpha)$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow -(6(-2) - 2(2+\alpha)) = 0 \Rightarrow \alpha = -8$$

$$f(x) = -(x-1)^2(x+8)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -(2(x-1)(x+8) + (x-1)^2) = 0$$

$$\Rightarrow ((x-1)(2x+16+x-1)) = 0$$

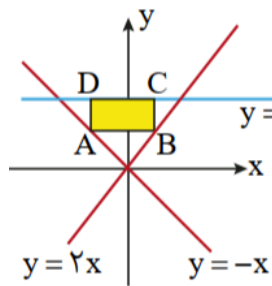
$$(x-1)(3x+15) = 0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases} \Rightarrow \min_{[-1,8]} -10$$

$$f(x) = -(x-1)^2(x+8) \Rightarrow f(-5) = -36 \times 3 = -108$$

پس

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



$$A \Big|_{2x_1}^{x_1} \quad B \Big|_{-x}^x$$

$$y_A = y_B \rightarrow 2x_1 = -x \rightarrow x_1 = -\frac{x}{2}$$

$$S = (x + \frac{x}{2})(8 - x) = \frac{3x}{2}(8 - x)$$

$$x = 4 \Rightarrow 6 \times 4 = 24$$

۱۸۱

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

در دامنه $[0, 4a]$ می‌خواهیم اکستریم مطلق پیدا کنیم، بنابراین مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

۱۸۲

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4a-x}$$

$$D_f = [0, 4a]$$

$$f(0) = f(4a) = 2\sqrt{a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4a-x}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4a-x} \Rightarrow x = 4a-x \Rightarrow x = 2a$$

$$f(2a) = \sqrt{2a} + \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$$

$$\max = 2\sqrt{2a} \Rightarrow 2\sqrt{2a} \times 2\sqrt{a} = 12\sqrt{2}$$

$$\min = 2\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2} \times a = 12\sqrt{2} \Rightarrow a = 3$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۳

نکته: نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد. نکته (آزمون یکنوایی تابع):

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

چون تابع چندجمله‌ای f فقط در بازه $[1, 3]$ اکیداً نزولی است، $x = 3$ و $x = 1$ ریشه‌های مشتق تابع f هستند. بنابراین:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ f'(3) = 0 \Rightarrow 27 - 6a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 24 - 4a = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9$$

اکنون طول نقطه بحرانی تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = 36x^4 + 18x \Rightarrow g'(x) = 144x^3 + 18$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 144x^3 + 18 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{18}{144} = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۴

نکته: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I \subseteq D_f$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

$$f(x) = \frac{a}{6}x^3 - bx^2 + 2x - \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2}x^2 - 2bx + 2$$

ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

تابع f چندجمله‌ای است، پس در تمام نقاط مشتق پذیر است. از طرفی نقطه $A(2, -2)$ اکسترمم نسبی تابع است، بنابراین $f(2) = -2$ و $f'(2) = 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} f(2) = -2 \Rightarrow \frac{4}{3}a - 4b + 4 - \frac{2}{3} = -2 \Rightarrow \frac{4}{3}a - 4b = -\frac{16}{3} \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 2a - 4b + 2 = 0 \Rightarrow 2a - 4b = -2 \end{cases} \xrightarrow{-} \frac{2}{3}a = \frac{10}{3} \Rightarrow a = 5, b = 3$$

در نتیجه $a + b = 8$ است.

اکنون با تعیین علامت مشتق تابع، نوع این اکسترمم را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)\left(\frac{5}{2}x-1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{5}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	2	$+\infty$
f'	+	+	-	+
f	$\nearrow$	$\circ$ max نسبی	$\searrow$ $\circ$ min نسبی	$\nearrow$

$\Rightarrow A(2, -2)$ مینیمم نسبی تابع است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۵

نکته: نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.
 نکته: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x از D_f داشته باشیم:
 $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.
 ابتدا نقطه یا نقاط بحرانی تابع $c(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$c(t) = \frac{3t}{t^3 + 54} \Rightarrow c'(t) = \frac{3(t^3 + 54) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 54)^2} = \frac{162 - 9t^3}{(t^3 + 54)^2}, \quad c'(t) = 0 \Rightarrow 162 - 9t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = 27 \Rightarrow t = 3$$

پس $t = 3$ ، تنها نقطه بحرانی تابع است. با رسم جدول تغییرات داریم:

t	۰	۳	$+\infty$
$c'(t)$		+	-
$c(t)$		$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{1}{9}$	

پس نقطه $A(3, c(3))$ ، نقطه ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق برابر است با:

$$c(3) = \frac{3(3)}{3^3 + 54} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

دقت کنید:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3}{t^2} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۶

تابع f از نقطه $A(1, -4)$ می‌گذرد، پس:

$$f(1) = -4 \Rightarrow a + b = -4 \quad (1)$$

همچنین نقطه A اکسترمم نسبی تابع، یعنی نقطه بحرانی نیز هست، پس $f'(1) = 0$. اکنون به محاسبه مشتق تابع می‌پردازیم:

$$f(x) = ax + bx^3 \Rightarrow f'(x) = a + 3bx^2$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a + 3b = 0 \quad (2)$$

با حل دستگاه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -6$$

بنابراین ضابطه f به‌صورت $f(x) = -6x + 2x^3$ است. برای تعیین نوع اکسترمم، داریم:

$$f(x) = -6x + 2x^3 \Rightarrow f'(x) = -6 + 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 6(x-1)(x+1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

حال با رسم جدول تغییرات، نوع اکسترمم را مشخص می‌کنیم:

x	-1	1
f'	+	-
f	$\nearrow$	$\searrow$
	max نسبی	min نسبی

پس نقطه A با طول $x = 1$ ، مینیمم نسبی تابع f است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۷ ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = (x-1)^2(4-x) \Rightarrow f'(x) = 2(x-1)(4-x) + (-1)(x-1)^2$$

حال معادله $f'(x) = 0$ را حل می کنیم و نقاط بحرانی را به دست می آوریم:

$$f'(x) = (x-1)(2(4-x) - (x-1)) = (x-1)(-3x+9)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, & f(1)=0 \\ x=3, & f(3)=4 \end{cases}$$

با رسم جدول تغییرات تابع f داریم:

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
f'		-	+	-
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		min نسبی	max نسبی	

پس نقطه $A(3, 4)$ ، نقطهٔ ماکزیمم نسبی است که با خط $y = -2$ ، ۶ واحد فاصله دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۸ ابتدا دامنهٔ تابع را مشخص می کنیم:

$$32 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 32 \Rightarrow -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$$

حال مشتق تابع f را به دست آورده و تعیین علامت می کنیم:

$$f = x\sqrt{32-x^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{32-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{32-x^2}} \times (x) = \sqrt{32-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{32-x^2}} = \frac{32-2x^2}{\sqrt{32-x^2}}$$

$$32 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4, \quad 32 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$$

چون مخرج نامنفی است، علامت صورت، همان علامت f' است:

x	$-4\sqrt{2}$	-4	4	$4\sqrt{2}$
f'		-	+	-
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$f' > 0 \rightarrow x \in (-4, 4)$

پس بیشترین مقدار a برابر ۴ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۹

ابتدا دامنه f را به دست می آوریم:

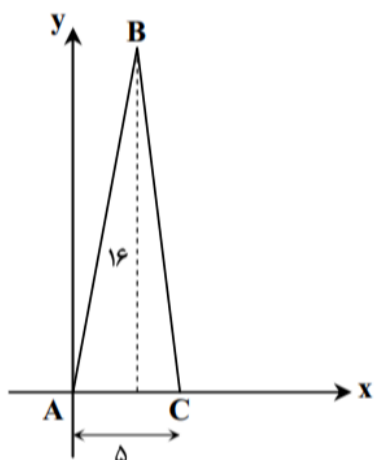
$$5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_f = (-\infty, 5]$$

حال مشتق تابع را محاسبه و ساده می کنیم:

$$y' = 2x \times \sqrt{5-x} + x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{4x \times \sqrt{5-x} - x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{4x(5-x) - x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{20x - 5x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{5x(4-x)}{2\sqrt{5-x}}$$

ریشه های صورت و مخرج کسر، نقاط بحرانی تابع هستند، زیرا در ریشه های صورت $f' = 0$ و در ریشه مخرج $f' = \infty$ است. پس تابع دارای سه نقطه بحرانی با طول های $x = 0$ ، $x = 4$ و $x = 5$ است. مختصات این سه نقطه به صورت $A(0, 0)$ ، $B(4, 16)$ و $C(5, 0)$ هستند. این سه نقطه در دستگاه مختصات به شکل روبه رو هستند و مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = 5 \times 8 = 40$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۰

دامنه تابع f مجموعه $D_f = [0, +\infty)$ است. اکنون نقطه یا نقاط بحرانی f را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x} + a \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

پس نقاط $x = 0$ و $x = \frac{1}{4}$ ، نقاط بحرانی تابع f هستند.

حال داریم:

$$f(0) = 2 + a$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 2 - \sqrt{\frac{1}{4}} + a = \frac{7}{4} + a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

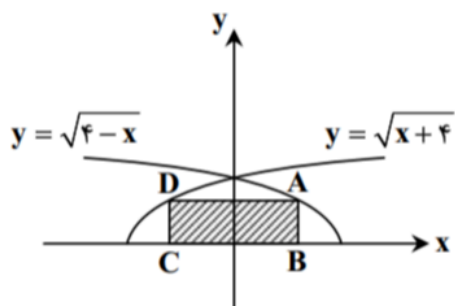
$$\frac{7}{4} + a = -\frac{5}{4} \Rightarrow a = -\frac{12}{4} = -3$$

پس $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ، مینیمم مطلق تابع است؛ بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۱

با توجه به شکل مقابل، اندازه AB ، عرض مستطیل و اندازه AD طول مستطیل است.
حال داریم:



$$AB = A \text{ عرض نقطه} = y_A, \quad AD = x_A - x_D$$

از طرفی:

$$A \in y = \sqrt{4-x} \Rightarrow y = \sqrt{4-x} \Rightarrow y^2 = 4-x \Rightarrow x_A = 4-y^2$$

$$D \in y = \sqrt{x+4} \Rightarrow y = \sqrt{x+4} \Rightarrow y^2 = x+4 \Rightarrow x_D = y^2-4$$

بنابراین:

$$AB = y, \quad AD = (4-y^2) - (y^2-4) = 2(4-y^2)$$

$$S = AB \times AD = 2y(4-y^2) = 2(4y-y^3) \Rightarrow S' = 2(4-3y^2)$$

$$S' = 0 \Rightarrow 4-3y^2 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{y>0} y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

اکنون بیشترین مقدار S را به دست می آوریم:

$$S = 2y(4-y^2) = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۲

طول نقطه A روی منحنی $y = 9-x^2$ را x می نامیم. پس مختصات A به صورت $A(x, 9-x^2)$ است. همچنین با توجه به تقارن سهمی نسبت به محور عرض ها، مختصات B به صورت $B(-x, 9-x^2)$ است. بنابراین ابعاد مستطیل $ABCD$ به صورت زیر است:

$$AB = x - (-x) = 2x, \quad AD = 9-x^2$$

پس تابعی که مساحت مستطیل را بر حسب x بیان می کند، به صورت زیر است:

$$S(x) = 2x(9-x^2) \Rightarrow S(x) = -2x^3 + 18x \quad (x > 0)$$

نقاط بحرانی تابع S را پیدا می کنیم:

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{3}$$

بنابراین $x = \sqrt{3}$ تنها اکسترمم تابع S بوده و مساحت به ازای آن ماکزیمم می شود. ابعاد مستطیل وقتی $x = \sqrt{3}$ باشد، به صورت

$$AB = 2\sqrt{3} \quad \text{و} \quad AD = 6 \quad \text{بوده و حداکثر مساحت آن برابر است با:}$$

$$S_{\max} = 2\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۳

با توجه به نمودار تابع f ، مشخص است که $x = -1$ و $x = 0$ طول اکسترم‌های نسبی تابع مشتق‌پذیر f هستند؛ بنابراین $f'(-1) = 0$ و $f'(0) = 0$ پس داریم:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (1) \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow -3 - 2a + b = 0 \xrightarrow{(1)} -3 - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \quad (2) \end{cases}$$

از طرفی با توجه به شکل $f(-1) = 0$ ، بنابراین:

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c \xrightarrow{f(-1)=0} 1 - \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad (3)$$

اکنون $f(2c)$ یعنی $f(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$(3) \Rightarrow f(1) = -1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -2$$

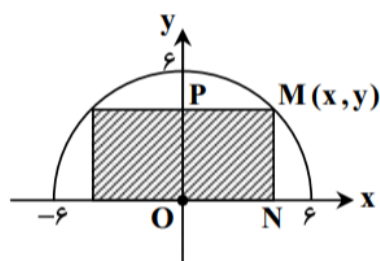
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۴

نقطه M روی این نیم‌دایره است؛ بنابراین $OM = 6$ ؛ پس داریم:

$$OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{36 - x^2}$$



چون شکل متقارن است، به جای مساحت مستطیل رنگی، نصف آن یعنی مساحت مستطیل $OPMN$ را برحسب مختصات M به دست می‌آوریم:

$$S_{OPMN} = x_M \cdot y_M = x\sqrt{36 - x^2} \quad (*)$$

چون $x > 0$ است، ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S = \sqrt{36x^2 - x^4}$$

اکنون با محاسبه S' و حل معادله $S' = 0$ ، داریم:

$$S' = \frac{72x - 4x^3}{2\sqrt{36x^2 - x^4}} \xrightarrow{S'=0} 72x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(18 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \Rightarrow x = 0 & \text{غلق} \\ 18 - x^2 = 0 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{18} \end{cases}$$

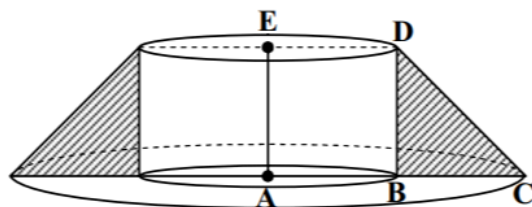
$$\xrightarrow{(*)} S_{OPMN} = (\sqrt{18})(\sqrt{36 - 18}) = 18$$

پس بیشترین مساحت مستطیل رنگی برابر $36 = 18 \times 2$ است.

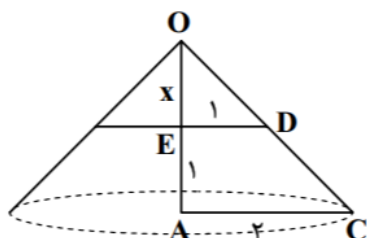
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۵

از دوران قسمت سایه زده حول ضلع AE، یک مخروط ناقص تولید می شود که یک استوانه از آن خارج شده است.



ابتدا حجم مخروط ناقص را به دست می آوریم. برای این کار باید حجم مخروط کوچک را از حجم مخروط کامل کم کنیم:



$$ED \parallel AC \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{ED}{AC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{1}{3} \pi (AC)^2 (OA) - \frac{1}{3} \pi (ED)^2 (OE)$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط ناقص} = \frac{1}{3} \pi (2)^2 (2) - \frac{1}{3} \pi (1)^2 (1) = \frac{7\pi}{3}$$

اکنون حجم استوانه را به دست می آوریم:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi (AB)^2 (AE) = \pi (1)^2 (1) = \pi$$

پس حجم قسمت سایه زده شده برابر است با:

$$V = \frac{7\pi}{3} - \pi = \frac{4\pi}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$D_f = (-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+2} - \frac{x^2-5}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x+2) - x^2 + 5}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{3x^2 + 8x + 5}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$x = -2$ طول نقطه بحرانی تابع نیست، چون تابع در این نقطه تعریف نشده است، پس تابع فقط ۲ نقطه بحرانی با طول ۱ و $-\frac{5}{3}$ دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$D_f = (-\infty, a], \quad f'(x) < 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2}{2\sqrt{a-x}} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{a-x}} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-x} < 1 \Rightarrow a-x < 1 \Rightarrow x > a-1$$

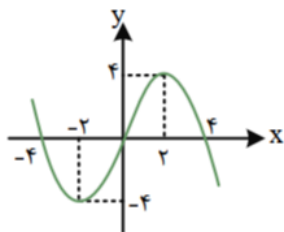
بازه ای که تابع نزولی اکید است $(a-1, a)$ است و طول بازه همواره ۱ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۶

۱۹۷

۱۹۸



$$y = \begin{cases} 4x - x^2 & x \geq 0 \\ 4x + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

اکسترم‌های تابع $A \Big|_4^2$ و $A' \Big|_{-4}^{-2}$ هستند.

$$AA' = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f'(x) = \frac{(x+a)^r - r(x+a)(x-a)}{(x+a)^r} = \frac{x+a-rx+ra}{(x+a)^r}$$

$$f'(x) = \frac{ra-x}{(x+a)^r} = 0, \quad x = ra, \quad A \Big|_{\frac{1}{\lambda a}}^{ra}$$

قرار است اکسترم تا خط $y = 1$ به فاصله $\frac{15}{16}$ باشد.

$$1 - \frac{1}{\lambda a} = \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{1}{\lambda a} = \frac{1}{16} \Rightarrow a = 2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f(1) = 4, \quad 1 + a + b = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -6, \quad b = 9$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2 \Rightarrow \alpha = 3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۰

۲۰۱

در تابع $f(x) = \frac{x^2 - ax}{2x + 5}$ مشتق به صورت $f'(x) = \frac{2x^2 + 10x - 5a}{(2x + 5)^2}$ است و باید دلتای صورت آن مثبت باشد تا اکستریم داشته باشیم. پس:

$$\Delta_{f'} = 100 + 40a > 0 \Rightarrow a > -2/5 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a_{\min} = -2$$

یعنی کمترین مقدار a برابر -2 است.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x + 5}$$

پس داریم:

$$\text{و مشتق آن } f'(x) = \frac{2x^2 + 10x + 10}{(2x + 5)^2} \text{ است.}$$

علامت مشتق به صورت $\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline & + & - \end{array}$ است و اکستریم با طول بزرگتر، مینیمم است.

$$2x^2 + 10x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}$$

$$x_{\min} - a = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} - (-2) = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۲

مشتق به صورت $f'(x) = 3x^2 - 10x + b$ است که باید ریشه داشته باشد، پس $\Delta_{f'} = 100 - 12b \geq 0$ یعنی عدد طبیعی b حداکثر ۸ است و داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow (3x - 4)(x - 2) = 0$$

یعنی نقاط بحرانی در $x = 2$ و $x = \frac{4}{3}$ قرار دارند و مختصات نقطه بحرانی سمت راست $A(2, 4)$ است:

$$y_A = 2^3 - 5(2)^2 + 8(2) = 24 - 20 = 4$$

$$\text{فاصله از مبدأ } OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

و داریم:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۳

در نقاط اکسترمم مشتق تابع برابر صفر است، پس داریم:

$$f(x) = \underbrace{((x-1)(x+2))}^x = x^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2 \times (2x+1) \times (x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

قاعده مثلث بین دو نقطه $(-2, 0)$ و $(1, 0)$ قرار دارد که طولش برابر $3 = 1 - (-2)$ است.

برای ارتفاع مثلث، باید عرض نقطه سوم را پیدا کنیم:

$$y = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + 2\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{81}{16}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{81}{16} = \frac{243}{32}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۴

از دو تابع مشتق می‌گیریم تا نقاط اکسترمم را پیدا کنیم:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 4) - (2x)(2x)}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$g'(x) = \frac{-8(x^2 + 9) - (-8x)(2x)}{(x^2 + 9)^2} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 72 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

بنابراین نقاط به‌صورت زیر خواهند بود:

$$A\left(-3, \frac{4}{3}\right), B\left(-2, -\frac{1}{2}\right), C\left(2, \frac{1}{2}\right), D\left(3, -\frac{4}{3}\right)$$

با حساب کردن دو ضلع AB و BC، محیط چهارضلعی را به‌دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + \left(\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{157}}{6}$$

$$BC = \sqrt{(-2 - 2)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{\sqrt{157}}{6} + \sqrt{17}\right) = \frac{\sqrt{157} + 6\sqrt{17}}{3}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مشتق‌های تابع در نقاط X_1 و X_2 با هم برابرند:

$$f'(X_1) = f'(X_2) \rightarrow \frac{-1}{X_1^2} = \frac{-1}{X_2^2} \rightarrow X_1 = \pm X_2 \xrightarrow{\text{متمایز}} X_1 = -X_2$$

تابع بیانگر فاصله دو نقطه از هم را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - (-x_2))^2 + \left(\frac{1}{x_2} - \left(-\frac{1}{x_2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{4x_2^2 + \frac{4}{x_2^2}} = 2\sqrt{x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}} \end{aligned}$$

می‌دانیم که عبارت $x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است، پس:

$$d \geq 2\sqrt{2}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$f(x) = (x-1) \left| x^3(1-x) \right| = \begin{cases} -x^3(x-1)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3(x-1)^2 & x < 0 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^3(x-1)^2 - 2(x-1)x^3 = -(x-1)x^3(3(x-1) + 2x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x^3(x-1)^2 + 2(x-1)x^3 = (x-1)x^3(3(x-1) + 2x) & x < 0 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x	۰	$\frac{3}{5}$	۱	
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

تابع روی بازه $\left[0, \frac{3}{5}\right]$ اکیداً نزولی است، پس $b - a = \frac{3}{5}$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۷

این تابع مشتق پذیر است، پس طول نقاط بحرانی ریشه های مشتق هستند:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - b = 0 \xrightarrow{x_1 = -2, x_2 = 3} S = -\frac{2a}{3} = 1, p = \frac{-b}{3} = -6$$

پس: $a = \frac{-3}{2}$, $b = +18$ و داریم:

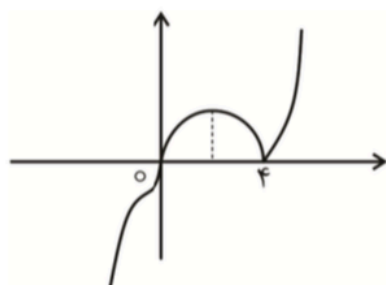
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 18x$$

و عرض ها را حساب می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 27 - \frac{27}{2} - 54 = -40.5 \\ f(-2) &= -8 - 6 + 36 = 22 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{اختلاف} = 60.5$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۸

در $X = 4$ نقطه گوشه و در $X = 0$ نقطه با مماس عمودی داریم. یک بحرانی دیگر هم بین ۰ و ۴ داریم که با مشتق پیدا می شود:

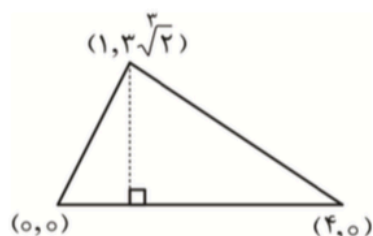
$$\begin{aligned} x < 4 &\Rightarrow f(x) = (4-x)^3 \sqrt{2x} \\ \Rightarrow f'(x) &= -1\sqrt{2x} + \frac{2(4-x)}{3\sqrt{(2x)^3}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(4-x)}{3\sqrt{(2x)^3}} = \sqrt{2x} \Rightarrow 8-2x = 3(2x) \Rightarrow x = 1$$

با جایگذاری در تابع داریم:

$$\begin{aligned} y = f(1) &= 3\sqrt{2} \\ S &= \frac{4 \times 3\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

و مساحت مثلث برابر است با:



(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

برای پیدا کردن نقاط بحرانی، ابتدا نقطهٔ مرزی $x = 2$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2^-) \xrightarrow{\text{ضابطه بالا}} = \frac{16}{3} - 8 - 12 + 1 = \frac{-41}{3} \\ f(2^+) \xrightarrow{\text{ضابطه پایین}} = 4m - 8 - 4m = -8 \end{cases}$$

پس $x = 2$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

در گام بعدی، مشتق ضابطه‌ها را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) \xrightarrow{\text{ضابطه بالا}} = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, -1$$

با توجه به محدودهٔ $x < 2$ ، فقط $x = -1$ قابل قبول است.

پس تا همینجا دو نقطهٔ بحرانی $x = 2$ و $x = -1$ قطعی است؛ بنابراین نقطهٔ بحرانی دیگری نباید داشته باشیم. درحالی‌که:

$$f'(x) \xrightarrow{\text{ضابطه پایین}} = 2mx - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{2m} = \frac{4}{m}$$

پس $x = \frac{4}{m}$ باید غیرقابل قبول شود، یعنی یا عددی کوچک‌تر از ۲ باشد و در محدودهٔ ضابطهٔ پایینی قرار نگیرد، یا دقیقاً $x = 2$ باشد و تکراری محسوب شود:

$$\frac{4}{m} \leq 2 \Rightarrow \frac{4 - 2m}{m} \leq 0 \Rightarrow \frac{2m - 4}{m} \geq 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } 2 \leq m$$

پس m مقادیر حسابی ۱ و ۰ را نمی‌تواند اختیار کند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

با توجه به نمودار رسم‌شده داریم:

$$f'(0) = 0 \rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \xrightarrow{x=0}$$

$$f'(-1) = 0 \rightarrow 3a + 2b(-1) = 0 \rightarrow 3a = 2b$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow a(-1)^3 + b(-1)^2 + c = 0 \rightarrow -a + b + c = 0$$

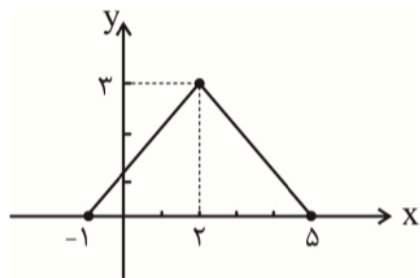
در نتیجه $a = -8$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}; D_f = [-1, 5]; f'(2) = 0$$

پس نقاط بحرانی $(-1, 0)$ ، $(5, 0)$ و $(2, 3)$ هستند.



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

$$6 = \text{فاصله } (-1, 0) \text{ تا } (5, 0)$$

$$3\sqrt{2} = \text{فاصله } (-1, 0) \text{ تا } (2, 3) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 0)^2}$$

$$3\sqrt{2} = \text{فاصله } (2, 3) \text{ تا } (5, 0) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$\text{محیط مثلث} = 6 + 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2} + 1)$$

اکنون نسبت مساحت به محیط را می‌یابیم:

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{محیط}} = \frac{9}{6(\sqrt{2} + 1)} = \frac{3}{2(\sqrt{2} + 1)} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۲

گزینه ۴ درست است.

محل تقاطع تابع f با نیمساز $y = x$ برابر $x = 0$ و $x = 1$ است، پس $0 < x < 1$ است. مختصات نقطه A به صورت (x, x^2) و در نتیجه A' به صورت (x^2, x) است.

$$|AA'| = \sqrt{(x^2 - x)^2 + (x - x^2)^2} = \sqrt{2} |x - x^2| \xrightarrow{0 < x < 1} |AA'| = \sqrt{2}(x - x^2)$$

اکنون ماکزیمم تابع $y = \sqrt{2}(x - x^2)$ را می‌یابیم:

$$y' = \sqrt{2}(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad y_{\max} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

از طرفی دیگر، مختصات نقطه B به صورت (x, x^3) و در نتیجه B' به صورت (x^3, x) است.

$$|BB'| = \sqrt{(x^3 - x)^2 + (x - x^3)^2} = \sqrt{2} |x - x^3| \xrightarrow{0 < x < 1} |BB'| = \sqrt{2}(x - x^3)$$

حالا ماکزیمم تابع $y = \sqrt{2}(x - x^3)$ را مشخص می‌کنیم:

$$y' = \sqrt{2}(1 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{0 < x < 1} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_{\max} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

در نتیجه اختلاف ماکزیمم‌ها برابر است با:

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{8\sqrt{6} - 9\sqrt{2}}{36} = \frac{(8\sqrt{3} - 9)\sqrt{2}}{36}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۳

گزینه ۴ درست است.

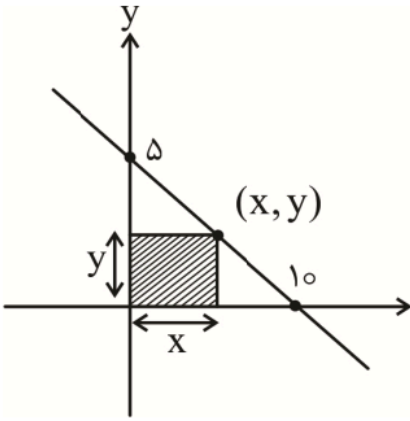
اگر خط $y = k$ را اکسترمم نسبی تابع در نظر بگیریم، معادله $f(x) = k$ باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\frac{x^2 + 2}{x + 1} = k \rightarrow x^2 + 2 = kx + k \rightarrow x^2 - kx + 2 - k = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow k^2 - 4(2 - k) = 0 \rightarrow k^2 + 4k - 8 = 0$$

ریشه‌های این معادله $y_{\min}$ و $y_{\max}$ تابع هستند و مجموع آن‌ها را به کمک فرمول $S = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$ محاسبه می‌کنیم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= x \times y = x \times \left(\frac{10 - x}{2} \right) \\ &= \frac{10x - x^2}{2} \end{aligned}$$

$$S' = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(10 - 2x) = 0 \rightarrow x = 5$$

$$y = \frac{10 - x}{2} \xrightarrow{x=5} y = \frac{5}{2}$$

$$S_{\max} = x \times y = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)